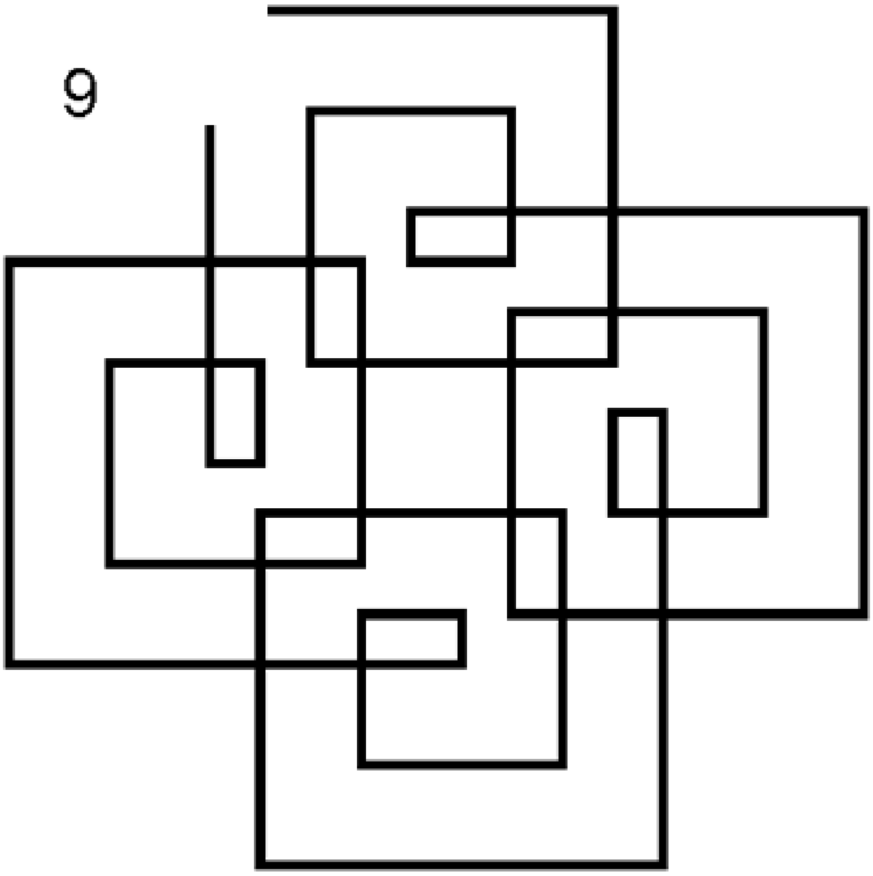
PARI n°20

Activités de recherche au service de l'apprentissage des mathématiques

9



Catherine CHADUTEAU, collège Les Avrils, Saint Mihiel
Martine DECHOUX, collège Robert Schuman, Hombourg Haut
François DROUIN, collège Les Avrils, Saint Mihiel
Pol LE GALL, IUFM de Lorraine
Isabelle JACQUES, collège Roger Nicklès, Dommartemont
Laurent MARX, collège Marie Curie, Fontoy
Pierre Alain MULLER, Collège La Carrière, Saint Avold

Travail effectué dans le cadre de l′ IUFM de Lorraine et de l′ IREM de Lorraine

FICHE SIGNALETIQUE

Les auteurs

L′Action relève du dispositif PARI (Programme Académique de Recherche et d’Innovation) cependant elle a été initiée avec la double tutelle de l′IUFM de Lorraine et de l′IREM de Lorraine.

Accompagnateurs :

François DROUIN, collège Les Avrils, Saint Mihiel
Pol LE GALL, IUFM de Lorraine

Professeurs impliqués dans la recherche action

Catherine CHADUTEAU, collège Les Avrils, Saint Mihiel
Martine DECHOUX, collège Robert Schuman, Hombourg Haut
Isabelle JACQUES, collège Roger Nicklès, Dommartemont
Laurent MARX, collège Marie Curie, Fontoy
Pierre Alain MULLER, collège La Carrière, Saint Avold

Résumé

Les programmes de mathématiques, à tous les niveaux d’enseignement, recommandent la pratique d’activités de recherche, de situations permettant à l’élève de découvrir l’aspect « science expérimentale » des mathématiques. Cependant les enseignants de mathématiques proposent peu d’activités de ce type, ou les relèguent dans un statut périphérique, exceptionnel, éloigné du « vrai » cours de mathématiques. Cette défiance des professeurs vis à vis de ces activités peut s’expliquer par divers facteurs : crainte de perdre du temps, peur de ne pas savoir les mener, déficit de répertoire...
La spécificité de notre recherche réside dans la volonté d’intégrer, d’articuler les situations de recherche à la pratique quotidienne de la classe, de les mettre au service de l’apprentissage des contenus mathématiques. La pratique des activités de recherche contribuera d’une part à donner aux élèves l’habitude et le goût de chercher et d’autre part à donner du sens aux notions du programme. A cette fin nous travaillerons sur un niveau de classe précis, celui de la classe de Quatrième. Nous expérimenterons diverses pratiques déjà connues (problèmes ouverts, narration de recherche, débat scientifique...) mais en cherchant avant tout la cohérence avec la pratique quotidienne de la classe de mathématiques. La modification de la représentation de la matière « mathématiques » chez les élèves est aussi un des enjeux de cette expérimentation.

Mots clés

Mathématiques, Collège

INTRODUCTION

L’origine de la recherche

Les programmes de mathématiques, à tous les niveaux d’enseignement, recommandent la pratique d’activités de recherche, de situations permettant à l’élève de découvrir l’aspect « science expérimentale » des mathématiques.
Cependant les enseignants de mathématiques proposent peu d’activités de ce type, ou les relèguent dans un statut périphérique, exceptionnel, éloigné du « vrai » cours de mathématiques. Cette défiance des professeurs vis à vis de ces activités peut s’expliquer par divers facteurs : crainte de perdre du temps, peur de ne pas savoir les mener, déficit de répertoire…
La spécificité de notre recherche réside dans la volonté d’intégrer, d’articuler les situations de recherche à la pratique quotidienne de la classe, de les mettre au service de l’apprentissage des contenus mathématiques. La pratique des activités de recherche visera d’une part à donner aux élèves l’habitude et le goût de chercher et d’autre part à donner du sens aux notions du programme.

Un groupe particulier

Contrairement à la majorité des groupes de recherche mis en place par l’IUFM dans le cadre du dispositif PARI, il ne s’agit pas ici d’enseignants du même établissement suivis pour une action interne par un chercheur de l’IUFM. Le groupe est constitué sur le modèle d’un groupe IREM (il relève d’ailleurs administrativement des deux structures) : un petit nombre de professeurs avec un ou deux animateurs. Les classes concernées sont réparties sur toute l’académie. Les professeurs ne se côtoient professionnellement que dans le cadre du groupe de travail.

Nos choix

Le choix de la quatrième

Nous avons choisi la classe de quatrième comme terrain d’expérimentation privilégié car beaucoup d’élèves éprouvent de grandes difficultés à ce niveau. La notion de démonstration est nouvelle et les élèves sont déroutés par les changements d’exigences des professeurs.
Les élèves ont beaucoup de difficultés à comprendre la nécessité, ou l’utilité, d’une démonstration. Forts de leur passé dans la matière – jusque là, il suffisait de constater – ils ne saisissent pas pourquoi les règles du jeu didactique ont changé. Les élèves effectuent un « bond épistémologique » vertigineux entre la cinquième et la quatrième. On ne leur demande rien de moins que de passer d’une conception de géométrie physique ou instrumentée (celle, par exemple, des géomètres égyptiens) à celle d’une géométrie abstraite (celle des Grecs). Pour établir qu′un triangle est rectangle, jusque là il suffisait de prendre l′équerre, maintenant il faut utiliser des propriétés, un raisonnement…
Notre pari réside dans le fait de croire que les élèves comprendront mieux l’intérêt de démontrer si on les fait passer par la pratique d’activités qui nécessitent de convaincre et de prouver.
Il semble, d’autre part, que de nombreux élèves ne parviennent pas à comprendre ce qu’est une propriété mathématique.
Nous avons choisi de mettre les élèves en situation de producteurs de propriétés afin de leur faire prendre conscience des critères qui font qu’un énoncé est une propriété mathématique.

Le choix des spirolatères

Afin que les élèves produisent des propriétés, nous leur avons proposé une situation délibérément hors programme : les spirolatères, objets mathématiques marginaux qui datent de la préhistoire de l'informatique pédagogique, à l'époque du langage LOGO.
Ce travail sur un contenu extérieur au programme aura pour objectifs :

- d'élucider la notion de propriété mathématique,
- de donner du sens à la nécessité de démontrer, au sens de "convaincre".

La séquence sur les spirolatères prend donc place en début d'année, avant tout autre travail de démonstration.

Le choix éditorial

Dans ce compte-rendu nous avons opté pour une présentation privilégiant les comptes-rendus de pratiques. On trouvera ainsi une présentation détaillée du début de la progression en quatrième à partir de l'activité dite des "spirolatères", puis un catalogue d'activités, utilisables à différents niveaux de classes du collège, pour mettre l'élève en situation de recherche dans le cadre de la classe de mathématiques.
Pour la plupart de ces activités nous présenterons une brève justification des choix et un compte-rendu d'une expérimentation de l'activité dans une classe. Cette présentation permettra au lecteur de comprendre les choix d'intervention (heureux ou malheureux) des professeurs dans ce type de séances.

Petites recommandations aux enseignants aventureux

Un changement de règles du jeu

Appelons les choses par leur nom, fût-il savant : lors des activités de recherche le "contrat didactique" est modifié.
Les règles implicites et explicites qui cadrent la vie des élèves et de leur professeur en mathématiques ont une place très importante dans les mécanismes qui pilotent les actions et les comportements des uns et des autres en classe.
A titre d'illustration, au bout de quelques heures de cours, les élèves repèrent à l'oreille si ce que dit le professeur est une consigne, un conseil, un résultat de cours… Ils savent que telle intonation attend telle réponse, ils devinent à l'expression de l'enseignant si la réponse qu'ils viennent de donner est juste, fausse, brillante ou calamiteuse…
Lorsque les élèves sont mis en situation de production de savoirs, de propriétés, d'exploration de configuration, etc. le professeur doit changer d'attitude et les élèves doivent le comprendre.
Les élèves, en effet, ne peuvent qu'être déroutés si leur professeur répond "je ne sais pas, cherche" ou "je ne veux pas te le dire" lorsqu'on lui demande si "c'est juste". La situation de recherche obéit à un nouveau contrat, il peut être utile de l'élucider.
Les principes de ce nouveau contrat sont les suivants : le professeur fait comme s'il ne savait pas la réponse, il n'intervient donc auprès des élèves que pour leur demander d'expliciter ce qu'ils trouvent, il peut aussi s'appuyer sur une amorce d'idée de l'élève pour le guider vers une piste. Dès lors, quand le professeur pose une question à un élève, ce n'est pas pour vérifier que ce dernier connaît la réponse. La situation de communication change de statut par rapport au fonctionnement ordinaire.
Que l'élève croit ou non à l'ignorance affichée de son professeur n'a que peu d'importance, l'essentiel est qu'il accepte de jouer ce jeu. Pour certains élèves cela ira de soi, pour d'autres une explication peut être nécessaire.

Cette question du changement de contrat n'est pas anecdotique, il est établi depuis longtemps que les élèves en difficulté ont tendance à se raccrocher à ce qu'ils savent du contrat didactique usuel pour pallier leurs carences mathématiques. Changer les règles du jeu sans les prévenir peut donc accentuer les difficultés.

<u>L'épineuse question du coût horaire</u>

L'horaire de mathématiques est étriqué au regard des programmes à traiter. Le détour par un chapitre supplémentaire ne se justifie que s'il permet de gagner du temps ensuite. Notre regard sur trois années d'expérimentation nous permet de dire que cela a souvent été le cas. Il a été moins nécessaire de revenir sur la nécessité de démontrer lors de la suite de l'année. La référence aux propriétés produites lors de la séquence des spirolatères a souvent permis de redonner du sens aux propriétés découvertes dans le cadre du programme.
Ajoutons que la gestion du capital horaire est une affaire de choix : le nôtre consiste à consacrer du temps, deux ou trois fois par an lors de la scolarité au collège, à mettre les élèves en situation de chercheurs, quitte à adopter à d'autres moments une attitude plus transmissive, moins dévoreuse de temps. Il ne nous paraît pas incongru de consacrer une ou deux heures à faire découvrir les propriétés liées à la configuration de la droite des milieux mais de présenter dans la même classe le théorème de Pythagore d'une manière plus traditionnelle.

La progression de quatrième

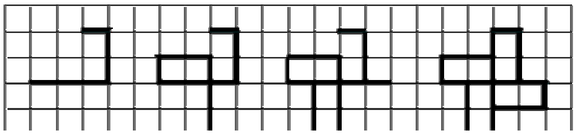
La progression ci-dessous est indicative, elle a été construite afin d'assurer un enchaînement cohérent entre les séquences présentées plus loin : les spirolatères, les quadrilatères, la droite des milieux, la distance d'un point à une droite.

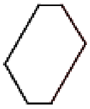
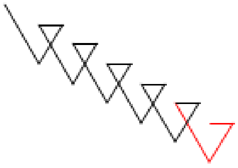
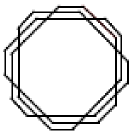
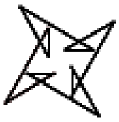
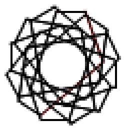
La proportionnalité : tableaux, graphiques (égalité de proportions…)
Première approche des équations.
Les spirolatères
Les quadrilatères
Nombres relatifs et calcul littéral
Droite des milieux (introduction avec l'étude libre de la configuration, puis plus loin Varignon)
Puissance d'un nombre positif, puissances positives de 10 (découverte de formules)
Pythagore : sens direct
Géométrie dans l'espace
Calcul littéral : distributivité et double distributivité
Thalès (droite des tiers, comment couper un segment en trois)
Multiplication/division des relatifs + puissance positive d'un nombre négatif
Cercle circonscrit (problème de l'échelle ou approche CABRI)
Statistiques : les moyennes
Réciproque de Pythagore
Mise en équation, problèmes de vitesse
Calculs sur les fractions
Cosinus
Distance d'un point à une droite
Puissances avec exposant négatif + notation scientifique
Médiane, bissectrice
Statistiques
Translation

PREMIERE SEQUENCE : LES SPIROLATERES

Qu′est-ce qu′un spirolatère ?

Les spirolatères ont été inventés par le biochimiste Frank Olds au début des années 70. Le spirolatère dordre n est construit en dessinant une suite de segments ; le premier mesure une unité de longueur, puis chaque nouveau segment est obtenu en augmentant la longueur de une unité et en tournant d’un angle constant. La figure ci-dessous montre la construction d’un spirolatère d’ordre 3 (défini par la suite de nombres 1, 2, 3 répétée quatre fois) avec un angle de 90° dans le sens des aiguilles d’une montre.



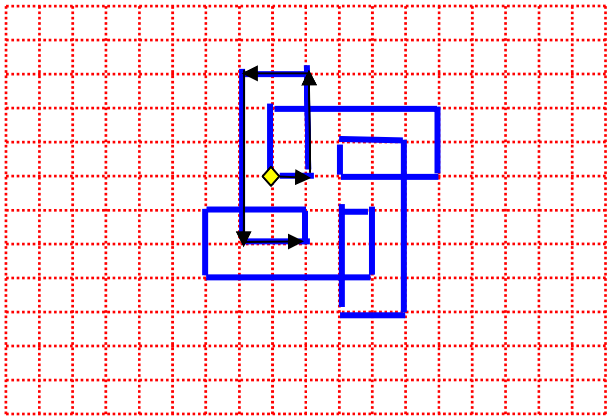
60°  120°  45°  150°  70°  …

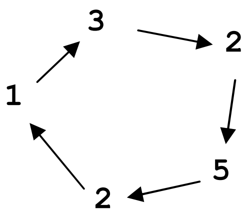
Nous avons légèrement modifié l'objet en considérant que les longueurs des différents segments ne sont pas forcément des entiers consécutifs et nous avons choisi de tourner toujours de 90° dans le sens direct.

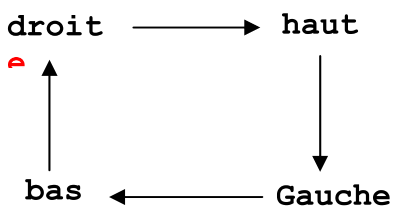
"Nos" spirolatères

Pour tracer le spirolatère 1-3-2-5-2 :
On choisit un point sur une feuille quadrillée puis on trace des segments :

- De 1 carreau vers la droite
- De 3 carreaux vers le haut
- De 2 carreaux vers la gauche
- De 5 carreaux vers le bas
- De 2 carreaux vers la droite
- De 1 carreau vers le haut
- De 3 carreaux vers la gauche
- De 2 carreaux vers le bas, etc »

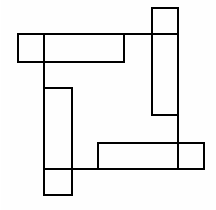




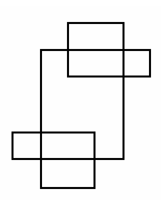


Exemples

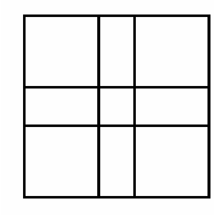
3-1-4-1-6



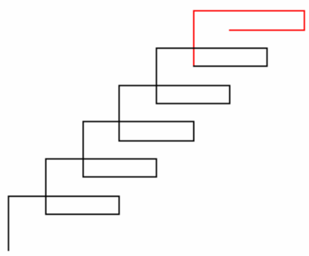
4-1-3-2-2-5



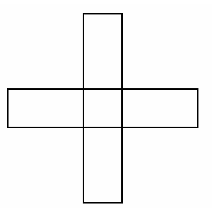
5-3-3



4-1-6-3



1-3-3



Nous appelons "longueur" du spirolatère le nombre de nombres de la suite le définissant.
Nous choisissons de choisir ces nombres entiers dans l'intervalle [1,9].

Quelques résultats que les élèves risquent de chercher ou de trouver :

- La première question que l'on peut se poser est « quand est-ce que cela se referme ? ». La réponse est : toujours si la longueur du spirolatère n'est pas un multiple de 4. Exceptionnellement dans le cas contraire.
- Les élèves peuvent aussi se demander si la figure a toujours un centre de symétrie, si elle est toujours stable par rotation d'un quart de tour.
- On peut aussi se demander si chaque spirolatère est défini par une suite unique. Cela peut conduire à définir une notion de « suite minimale » ou de « spirolatère irréductible ». Il est flagrant, en effet, que la répétition de la suite génére la même figure : 1-2 et 1-2-1-2 produisent le même rectangle.
- Les élèves peuvent s'intéresser aux spirolatères de longueur 1, de longueur 2.
- Ils peuvent chercher l'incidence de transformations sur les nombres : que se passe-t-il si on les permute ? si on les multiplie par 2 ?…

Le protocole

La séquence se déroulera suivant trois phases :

- Phase 1 (étapes 1 et 2) : découverte des spirolatères et production de propriétés.
- Phase 2 (étapes 3 et 4) : choix de propriétés à communiquer.
- Phase 3 (étapes 5 et 6) : étude des propriétés de l'autre classe.

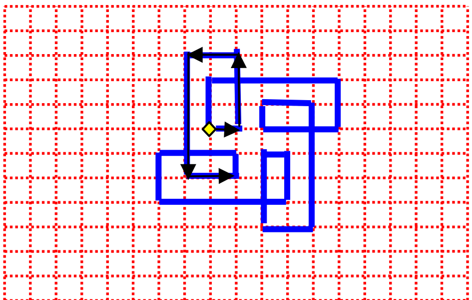
Première étape (15 minutes)

En fin d'heure le professeur présente aux élèves ce qu'est un spirolatère.

Présentation proposée :
« Je vais vous montrer une nouvelle sorte de figures mathématiques : les spirolatères.
Un spirolatère est défini par une suite de nombres entiers.

Par exemple 1-3-2-5-2 :
on choisit un point sur une feuille quadrillée puis on trace des segments :

- De 1 carreau vers la droite
- De 3 carreaux vers le bas
- De 2 carreaux vers la gauche
- De 5 carreaux vers le haut
- De 2 carreaux vers la droite
- De 1 carreaux vers le bas
- De 3 carreaux vers la gauche
- De 2 carreaux vers le haut, etc. »



Le professeur fait tracer ce spirolatère, puis il demande aux élèves de tracer un autre spirolatère, à trois nombres, par exemple (2 ; 1 ; 4).
Puis le professeur dit à la classe :
« On ne sait pas grand chose pour le moment sur les spirolatères. Votre classe, et quelques autres classes de quatrième de la région, dans d'autres collèges, vont les étudier ce trimestre. Pour la prochaine fois je vous demande de dessiner quelques spirolatères : vous faites des essais avec 1, 2, 3 … nombres, avec des nombres différents… ».

Deuxième étape (30 minutes)

Les élèves travaillent en groupes.

Le professeur donne la consigne :
« Je vous demande d'écrire des remarques, des propriétés que vous constatez sur les spirolatères que vous avez dessinés.»

A la fin de la séance, le professeur demande à chaque groupe de rendre par écrit les propriétés qu'il pense avoir trouvées. Les élèves peuvent donner leur nom aux propriétés.

Troisième étape (1 h)

Travail en groupes.

Le professeur a choisi une douzaine de propriétés parmi celles qui lui ont été remises. Son

3) Choisissez une des questions qu'ils ont posées et tentez d'y apporter votre contribution.»

Sixième étape (1 heure)

Correction du devoir.
A cette occasion, si les élèves ne l'ont pas trouvé précédemment, l'enseignant propose un outil d'explication.

Il peut s'agir d'un tableau du type :

Droite	**Haut**	**Gauche**	**Bas**

En inscrivant les nombres dans la colonne correspondant aux directions, on peut expliquer pourquoi les spirolatères de longueur 3 se referment : exemple pour 3-1-4

Droite	**Haut**	**Gauche**	**Bas**
3	1	4	3
1	4	3	1
4	3	1	4
Total 8	Total 8	Total 8	Total 8

Après quatre séries de déplacements 3-1-4, on s'est déplacé de 8 unités dans chaque direction, on est de retour au point de départ et en début de cycle.

On établit de même que la plupart des spirolatères de longueur 4, 8, 12 bouclent :
Ainsi pour un spirolatère A-B-C-D :

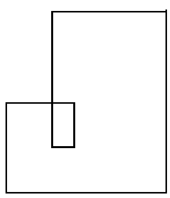
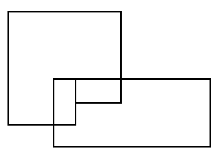
Droite	Haut	Gauche	Bas
A	B	C	D
A	B	C	D
A	…		

Les déplacements ne se compensent plus.

Pour un spirolatère de longueur 8, on obtient :

Droite	Haut	Gauche	Bas
A	B	C	D
E	F	G	H
A	B	…	

La courbe est finie si A+E=C+G et B+F=D+H. On peut ainsi construire des spirolatères de longueur 8 ou 12 qui bouclent.

Exemples : 1-2-3-4-7-8-5-6 :  3-2-1-3-7-3-6-1-2-4-5-5 : 

Les compétences visées

Les compétences que nous espérons développer chez les élèves sont de plusieurs natures :

Les compétences relatives au raisonnement

La nécessité de démontrer

L'objectif principal visé est donc que les élèves comprennent que la vérité d'une assertion mathématique n'est pas une question d'opinion. Nous pouvons détailler cet objectif en plusieurs composantes :

- Les élèves comprennent le principe du tiers exclu : une propriété est juste ou elle est fausse.
- Les élèves comprennent qu'il suffit d'un contre-exemple pour invalider une assertion.
- Les élèves comprennent qu'une multitude d'exemples favorables ne suffit pas, en soi, à établir la vérité d'une assertion.

En ce qui concerne ce dernier objectif, il convient toutefois de nuancer. Nous considérerons que l'élève qui repère un invariant dans une série (éventuellement très limitée) d'exemples et qui découvre que cet invariant est décisif pour l'explication de la propriété qu'il a conjecturée fait acte de démonstration.
Nous pouvons prendre l'exemple de l'assertion « les spirolatères de longueur 2 sont des rectangles ». On peut supposer que les élèves n'auront pas besoin de multiplier les expériences pour se convaincre que le phénomène qui se produit – à savoir que les déplacements vers la gauche et la droite, ainsi que les déplacements verticaux, sont de même longueur – se reproduira/répètera quels que soient les nombres choisis.
L'élève se situera ainsi au niveau de preuve que Nicolas Balachev qualifie de « l'exemple générique » : l'élève établit le résultat avec deux valeurs quelconque, en étant conscient qu'avec d'autres valeurs « cela serait pareil ».

Qu'est-ce qu'une bonne propriété ?

Quand ils devront choisir les propriétés à conserver, les élèves devront se construire et utiliser des critères de choix.
On peut supposer qu'ils privilégieront le critère d'exactitude : la propriété n'est pas prise en défaut.

On peut attendre qu'ils découvrent d'autres critères :

- Critère d'utilité et d'économie : la propriété permettra d'économiser d'autres recherches, de se prononcer sur la vérité d'autres propriétés.
- Critère de généralité, de portée : la propriété concerne suffisamment de cas pour être utile.
- Critère de « non-évidence » : la propriété n'est pas triviale.
- Critère de précision : la propriété est rédigée en termes suffisamment précis pour ne pas être un « fourre-tout ».
- Critère de non-redondance : il n'y a pas de redites entre les différentes propriétés choisies.
- Critère de force : une propriété qui en englobe une autre est plus intéressante que cette dernière.

Les compétences relatives à la communication

Pour l'élève, la communication d'un résultat de mathématiques est un exercice paradoxal : il lui faut écrire ou dire quelque chose à un interlocuteur qui sait mieux que lui ce que l'élève est censé lui apprendre. Le critère de réussite de l'exercice n'est pas la pertinence, le volume,

l’originalité du message, mais sa conformité à l’attente de l’enseignant. Cette conformité concerne le contenu mais aussi la forme.
La situation est d’autant plus compliquée pour l’élève que, là encore, les règles ont pu changer. Le professeur n’a plus les mêmes exigences que l’année précédente.

Les choix d’organisation de la séquence sur les spirolatères prennent en compte cette

- L’élève prend conscience de la nécessité d’utiliser un langage précis, dénué autant que possible d’ambiguïtés.
- L’élève prend conscience de l’utilité d’utiliser un langage commun pour désigner les mêmes objets et les mêmes phénomènes.
- L’élève découvre l’utilité de définir des concepts.

Le rapport au savoir

La pratique de l’activité proposée peut également conduire à une modification du rapport au savoir en mathématiques.

En français, les élèves pratiquent des activités dans lesquelles ils sont producteurs de texte, producteurs de savoir, et d’autres activités dans lesquelles ils étudient des textes produits par d’autres. En mathématique, le savoir est toujours produit ou transmis par le professeur. Les élèves ne sont pas habitués à être en situation de producteurs.
La séquence sur les spirolatères les met donc dans une situation inédite.

L’activité de recherche peu cadrée est probablement nouvelle pour les élèves, ou pour le moins, peu courante. Elle ne rentre sans doute pas dans le cadre du contrat didactique usuel.
Selon les élèves, les effets de ce décalage peuvent être divers. Certains élèves prendront peut-être goût à cette activité, et peut-être cet intérêt débordera-t-il sur la matière. Inversement, certains élèves rejetteront peut-être cette activité qui ne leur paraîtra pas conforme, voire illégitime, dans le cadre de leur conception de la matière et de l’activité en classe de mathématiques.
Au delà du plaisir que les élèves pourront éprouver dans cette activité de recherche, et au fait qu’elle se déroule en partie en groupes, peut-être découvriront-ils que les mathématiques ne sont pas seulement une matière où l’on apprend et l’on applique, mais aussi une matière où l’on cherche, où l’on découvre, où l’on confronte.

Les résultats obtenus dans les classes

Remarques générales

Le travail sur les spirolatères a plutôt plu aux élèves, même s’ils ont été déroutés au départ. On peut en dire autant du ressenti des professeurs expérimentateurs.

Par rapport à la nécessité de démontrer

L’expérience a été très riche.
De nombreux phénomènes ont été mis en évidence, qui permettent peut-être de mieux situer certaines résistances à l’apprentissage de la démonstration.

L’importance de l’auteur

Ce que les élèves savent les uns des autres a une influence. Dans une classe, on cherche systématiquement à réfuter les propriétés de la tête de classe, ailleurs on évite de contester la propriété d’un élève violent… Lors de la phase d’échanges entre classes, ce problème a disparu par méconnaissance des auteurs, en revanche un "esprit de corps" pousse parfois une classe à juger la production de l’autre avec condescendance.

La place délicate du contre-exemple

Les élèves ont bien perçu le rôle du contre-exemple dans la réfutation d’un énoncé. Ils ont acquis le réflexe de chercher un contre-exemple pour invalider, et celui de chercher si on pourrait en opposer un lorsqu’il s’agit de valider.

On peut toutefois remarquer qu'ils n'acceptent pas forcément facilement d'être pris en défaut sur leurs propres affirmations. Ils ont envie d'avoir « vu juste », quitte à refuser le contre-exemple qui les met en difficulté.[3]

Qu'est-ce qu'on donne et qu'est-ce qu'on garde ?

Les critères de choix des propositions à envoyer aux autres classes ont varié d'un endroit à l'autre : souci de ne communiquer que des propriétés certaines, même si elles sont très pauvres, ou souci de poser des questions, ou encore choix délibéré de ne pas donner ce que l'on a trouvé de mieux. Plus les élèves sont en difficulté, moins ils communiquent.
D'autres phénomènes amusants sont apparus : dans une classe une élève a tenté de s'approprier le résultat d'une autre en apportant une correction grammaticale à l'énoncé.
Ailleurs encore, un savant a été incompris : une élève avait trouvé toute seule une preuve du bouclage des spirolatères, quasiment en réinventant les vecteurs, son groupe n'a pas compris et a rejeté l'explication.

La place tardive de la démonstration

Dans la séquence, telle qu'elle est agencée, l'outil de démonstration arrive tard. Pour certaines classes cette introduction a répondu à une attente. Jusque là on ne pouvait que conjecturer ou réfuter, l'outil « tableau » a permis d'assurer des résultats positifs.
Les meilleurs élèves, les meilleures classes, ont particulièrement apprécié cette phase.
Pour les autres, l'abondance d'exemples continue à valoir preuve. On peut se demander si la séquence spirolatères n'a pas renforcé ce travers.

En ce qui concerne les critères de choix

- Critère de vérité : c'est pour les élèves le critère le plus important, voire le seul.
- Critère d'utilité et d'économie : ce critère n'est pas repéré par les élèves, mais il est vrai qu'il ne peut se mesurer qu'après coup...
- Critère de généralité, de portée : il y a eu des progrès sur ce point au cours de la séquence. Les élèves ont produit volontiers des propriétés locales au tout début, puis ils ont cherché à étendre ces propriétés.
- Critère de « non-évidence » : dans certaines classes, on préfère proférer des évidences plutôt que de prendre le risque d'essuyer un contre-exemple.
- Critère de précision : très peu de propriétés ont été rédigées d'une manière imprécise.
- Critère de non-redondance : la phase de tri en classe a généralement permis d'éviter les redites.
- Critère de force : ce critère a été employé quelquefois, lors du tri.

[3] On a ainsi vu les mêmes élèves, pris en défaut sur une de leur propriétés par un contre-exemple, refuser l'argument en invoquant que le cas était si particulier qu'il ne méritait pas que l'on s'y attarde, mais brandir sans hésitation le même contre-exemple pour réfuter une propriété d'une autre classe !

DEUXIEME SEANCE EN QUATRIEME : LES QUADRILATERES

Afin de réinvestir la notion de propriété et le travail sur les spirolatères, afin aussi de réactiver les connaissances sur les quadrilatères étudiés en cinquième, le professeur propose l'activité suivante.

Protocole

Le professeur annonce à la classe qu′il est tombé par hasard (sur Internet, dans un cahier, une révélation en rêve, …) sur une liste de propriétés concernant les quadrilatères.
Les élèves doivent effectuer le même travail que celui qui avait été consacré à l′examen des propriétés sur les spirolatères, à savoir trier les propriétés : dire lesquelles sont exactes et pourquoi elles le sont, trouver des contre-exemples pour réfuter les autres.

Les élèves travaillent individuellement puis confrontent leurs résultats avec ceux de leur voisin. Enfin le professeur anime une synthèse collective.
On peut garder une partie de la liste de propriétés pour un travail à la maison ou pour une deuxième séance.

Liste de propriétés utilisables

1. Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et perpendiculaires est un carré.
2. Un quadrilatère qui possède deux diagonales de même longueur et deux angles droits consécutifs est un rectangle.
3. Un quadrilatère qui possède un centre de symétrie est un parallélogramme.
4. La somme des mesures des angles d'un quadrilatère est égale à 360°.
5. Les diagonales d'un parallélogramme sont les bissectrices des angles.
6. Dans un parallélogramme, les angles consécutifs sont supplémentaires.
7. Si un parallélogramme admet un cercle circonscrit, ce parallélogramme est un rectangle.
8. Si un quadrilatère est régulier (quatre côtés de même longueur et quatre angles de même mesure), c'est un carré.
9. L'aire d'un losange est obtenue en multipliant les longueurs de ses diagonales et en divisant par deux.
10. L'aire d'un parallélogramme est obtenue en multipliant les longueurs de deux côtés consécutifs.
11. Si un trapèze admet un cercle circonscrit, c'est un rectangle.
12. Si un quadrilatère ABCD est constitué de deux triangles isocèles ABC et ADC, alors ses diagonales sont perpendiculaires.
13. Si un quadrilatère a ses quatre côtés égaux, alors il a ses diagonales perpendiculaires.
14. Si un quadrilatère a deux paires de côtés égaux et des diagonales perpendiculaires, c'est un losange.
15. Si un quadrilatère ABCD est constitué de deux triangles ABC et ADC, rectangles en B et en D, c'est un rectangle.

Prolongements

Ce type d'exercices pourra être réutilisé à l'occasion d'autres chapitres. On pourra notamment proposer des énoncés dans le domaine du numérique.
On trouvera ci-dessous une liste de propriétés numériques à proposer à la classe.

A l'occasion du chapitre sur les puissances, éventuellement pour introduire la notion, on peut utiliser :

- $A^n \times A^p = A^{n+p}$
- $A^n + A^p = A^{n+p}$
- $A^n + A^n = 2A^n$
- Si on met un nombre à la puissance 2 puis qu'on met le résultat à la puissance 3, on obtient la même chose que si on le met d'abord à la puissance 3 puis le résultat à la puissance 2.
- Si A+B = C , alors pour tout entier n, $A^n + B^n = C^n$.
- Si x = 8 cm, alors x^2 = 64 cm².

TROISIEME SEQUENCE EN QUATRIEME : LA DROITE DES MILIEUX

Cette séquence doit intervenir peu de temps après la séquence des spirolatères afin d'y faire efficacement référence.

Protocole

L'enseignant propose à sa classe une configuration de base avec la consigne :
"J'aimerais que vous découvriez des propriétés à partir de la figure suivante : un triangle ABC, …[4].
Comme nous l'avions fait avec les spirolatères, j'attends de vous que vous disiez pour chaque propriété si vous en êtes sûrs, si cela vous paraît seulement plausible, si vous avez des éléments de preuve…"

Les élèves travaillent par groupes (au moins par deux), font des essais, écrivent les propriétés qu'ils découvrent.

En synthèse de ce travail, l'enseignant soumet les propriétés trouvées au débat.
Lors de l'institutionnalisation dans le cahier de cours, l'enseignant indique à la classe quelles sont les propriétés qui sont au programme, il justifie ainsi que seules celles-là figurent dans le cours.

Comment cela s'est passé …

Martine Dechoux

Progression : en géométrie, les élèves ont travaillé sur les spirolatères, sur la notion de propriété d'une figure (caractérisation des quadrilatères). Ils savent ce qu'est une séquence déductive et ont déjà essayé d'en enchaîner.

Objectifs :
- découverte du théorème de la droite des milieux,
- mise en situation de recherche reproduisant celle des spirolatères : émettre une ou des conjectures et envisager leur démonstration
- débat éventuel,
- s'inscrire dans une progression par épisodes vers l'apprentissage du raisonnement déductif.

Contexte
La classe est composée de 6 bons élèves bilangues, de 5 élèves pressentis en grande difficulté et de 14 élèves de niveau moyen.
En début de séance les élèves sont placés en groupes de 4 constitués par le professeur en fonction des affinités, mais en tenant compte des éventuels problèmes de "chahut" et de la nécessité d'avoir au moins un élève de niveau correct dans le groupe. C'est la 3ème séance en groupes de l'année.

Consignes
<u>Tâche</u> : *tracer un triangle quelconque ABC. Placer M, milieu de [AB]. Tracer la parallèle à (BC) passant par M. Trouver les propriétés de la figure.*

---

[4] Plusieurs suites sont envisageables : l'enseignant peut donner deux milieux, trois milieux, deux milieux et le segment qui les relient… Nous avons essayé plusieurs choix. Il appartient à chacun, en fonction de ce qu'il sait de sa classe, de proposer une configuration de départ plus ou moins élaborée.

Communication : *désigner un secrétaire et un rapporteur du groupe.*
Le secrétaire écrit les propriétés observées sur une feuille portant le nom des membres du groupe.
Le rapporteur se prépare à convaincre les autres groupes de la validité d'au moins une des propriétés observées.

Compte-rendu
Dès la figure faite, il ne fait aucun doute pour personne que le point d'intersection de la parallèle avec le troisième côté est le milieu : c'est vrai pour les quatre figures du groupe.
Trois groupes déclarent tout de suite avec de gros soupirs qu'il faut le prouver (impact du travail sur les spirolatères).
Mais dans trois groupes sur six deux obstacles apparaissent : tout d'abord, les élèves ne sont pas sûrs que ce point existe vraiment, puisqu'il n'est pas nommé et ensuite, ils n'ont pas le droit de mesurer. Il faut donc leur suggérer de nommer le point et de mesurer pour vérifier. Mais l'expérience des spirolatères est là pour leur rappeler qu'on n'est pas vraiment sûr de ce qu'on observe (une des figures est d'ailleurs très approximative) et pour les inciter à trouver une preuve convaincante.
J'ajoute pour tous les élèves qu'on peut penser à ajouter des éléments à la figure.
Les bons élèves de cette classe sont très "scolaires" et piétinent. C'est une élève en grande difficulté, mais apparemment très créative, qui a l'idée de placer le troisième milieu et de joindre les 3 milieux. La figure lui paraît alors tellement "logique" (sic) que son groupe ne voit pas ce qu'il faut démontrer. Je lui demande d'aller faire sa figure au tableau. Chacun l'imite.
J'essaie de relancer la recherche en faisant bien observer à chaque groupe, qu'il est question de milieux et de parallèles, donc certainement de...
Trois groupes tentent de démontrer qu'il y a des parallélogrammes mais la mise en forme du raisonnement pose problème en raison des difficultés à démêler les données des conclusions trop évidentes à leurs yeux.
Je suggère alors de recommencer une figure et d'essayer d'ajouter des éléments en dehors du triangle.
Un groupe, ayant trouvé jolie la figure constituée des quatre petits triangles entreprend de la mettre en couleur, faute de mieux. Je les incite à la "prolonger" par d'autres triangles identiques. Cette construction ne peut que les aider à intégrer la propriété, directe ou réciproque.

Un groupe s'approche de la solution, je l'aide à conclure en raison de l'approche de la fin de la séance et le rapporteur du groupe va présenter la "solution" au tableau. Le débat n'a donc pas vraiment lieu cette fois, les groupes ont été relativement bruyants et les échanges se sont faits de façon anarchique.
Les élèves ont cette démonstration à rédiger pour la séance suivante.
Ce sera très mal fait et la séance suivante sera entièrement consacrée au travail d'enchaînement des séquences déductives en classe entière.
Une troisième séance permettra d'énoncer le théorème direct (qu'on démontre), puis sa réciproque (qu'on ne démontre plus) dans le cahier de cours.

Commentaires
Choix de la tâche ; l'année précédente, la consigne était la suivante : *Tracer un triangle quelconque, placer les milieux de deux côtés du triangle, trouver les propriétés de la figure.*
Un seul des groupes avait pensé à joindre les deux milieux, les autres avaient tracé les deux médianes et n'avaient pas réussi à faire émerger la moindre propriété. D'où le choix de l'approche ci-dessus.

Difficultés des élèves : ils ont exprimé à l'unanimité que c'était vraiment trop dur. Il était important de les rassurer:

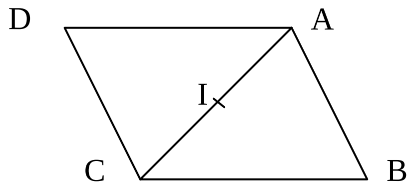
- L'idée de tracer une parallèle à un côté du triangle, passant par le sommet opposé ne pouvait pas leur venir spontanément.
- Par contre, ils avaient été tous actifs pendant la séance (deux élèves seulement ont décroché) et beaucoup avaient eu de bonnes idées, ne serait-ce que de rechercher toutes les propriétés des parallélogrammes dans leur cahier ou leur livre.
- Ils ont bien compris que tout se prouve, même l'évidence apparente, et que démontrer nécessite du travail et la connaissance des propriétés démontrées antérieurement.
- Ils ont tous progressé dans leur capacité à prouver et à s'exprimer, chacun suivant ses difficultés de départ, et tous commencent à comprendre ce que signifie "être rigoureux en mathématiques".
- Pour certains très bons élèves un peu de modestie s'installe et c'est peut-être bien aussi.

QUATRIEME : TRIANGLES ET SYMETRIES CENTRALES

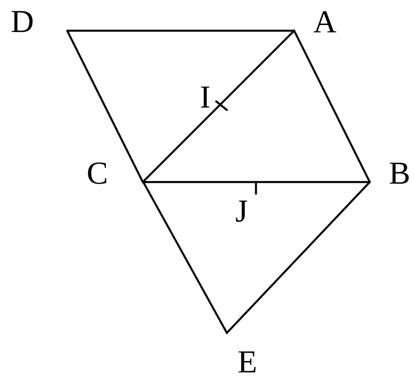
François Drouin

Cette approche constitue une alternative à la précédente pour l'introduction de la droite des milieux.

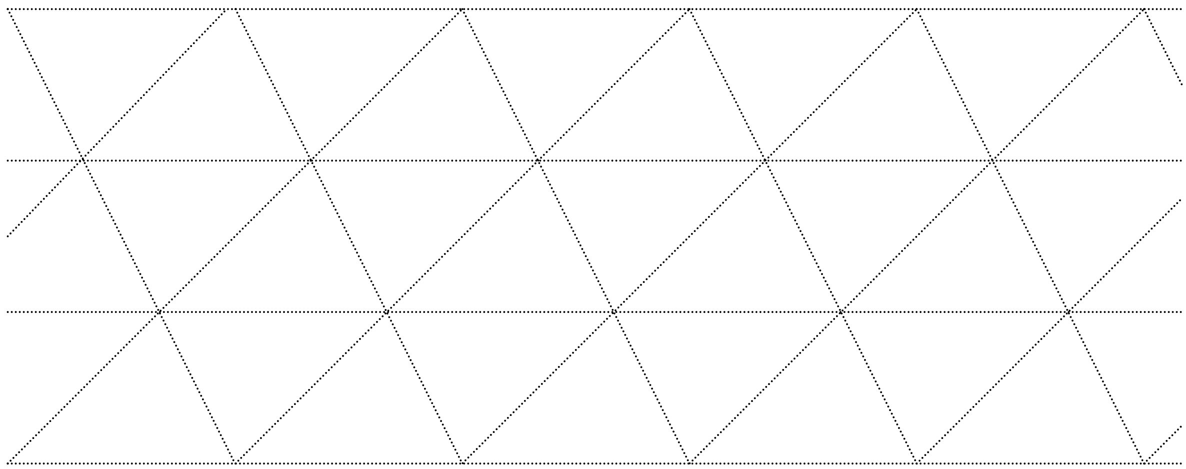
Premiers tracés

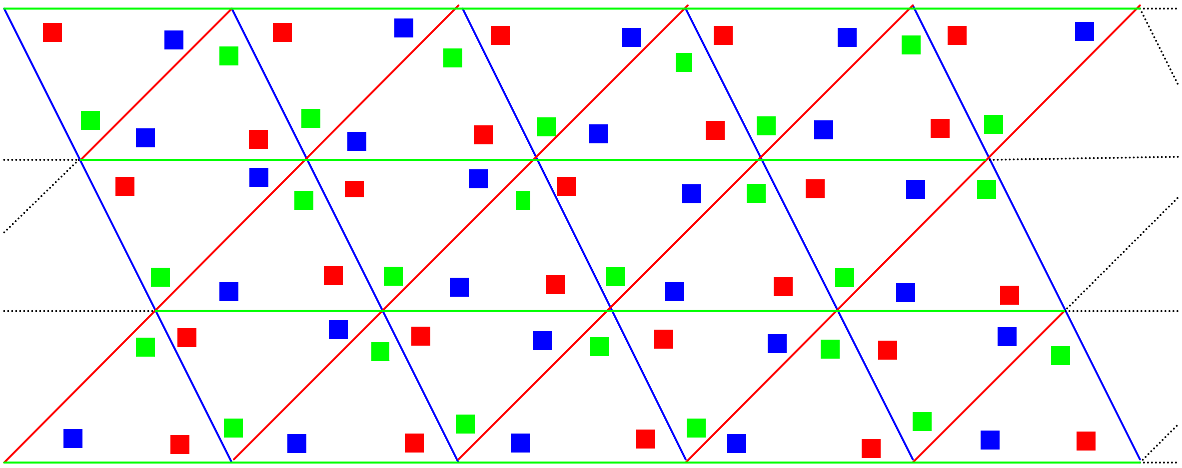


J'ai tracé un triangle ABC et son symétrique ADC par rapport au milieu I de [AC].
La demi droite [CB) a pour image la demi droite [AD), elle a fait un demi tour autour du point I. Les droites (AD) et (CB) ont donc même direction et sont donc parallèles. Il en est de même pour les droites (CD) et (AB).



J'ai maintenant tracé le symétrique du triangle ABC par rapport au milieu du segment [BC]. Pour la même raison que précédemment, je suis sûr que les droites (AC) et (BE) sont parallèles.
En poursuivant les tracés, j'obtiens un réseau triangulé formé par trois directions de droites parallèles équidistantes. Je suis sûr que les parallèles horizontales sont équidistantes car leur écartement est égal à la longueur de la hauteur verticale des triangles symétriques. Ces triangles ont même aire, les hauteurs correspondant à des côtés égaux sont donc égales.
Le réseau est réalisé à l'aide de symétries centrales, de nombreuses égalités d'angles ou de longueurs peuvent être visualisées par un peu de coloriage.



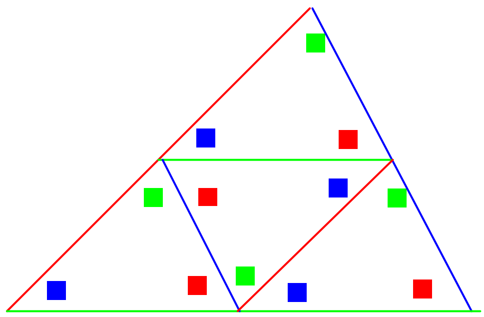


Voici un réseau formé de triangles isométriques :

Les angles rouges sont égaux, les angles verts sont égaux, les angles bleux sont égaux.
Les côtés opposés aux angles rouges sont égaux et parallèles, les côtés opposés aux angles verts sont égaux et parallèles, les côtés opposés aux angles bleux sont égaux.et parallèles.

Conséquences pour les angles
L'examen du réseau et des angles coloriés justifie l'égalité des angles opposés par le sommet, des angles alternes internes ou correspondants rencontrés lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante.
L'examen du réseau et des angles coloriés justifie également le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à la mesure d'un angle plat.

Droites des milieux



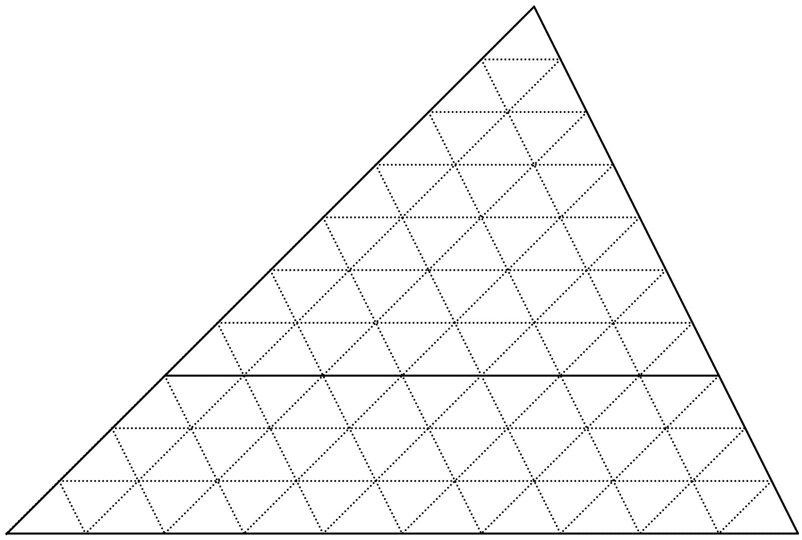
Les énoncés qui suivent se déduisent directement de la portion de réseau dessinée ci-dessus :

Le segment qui relie les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté. De plus sa longueur est égale à la moitié de la longueur de ce troisième coté.

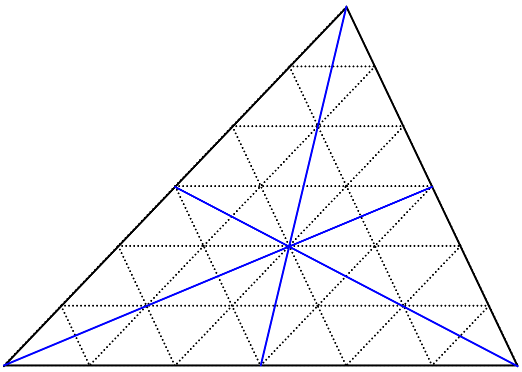
Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un premier côté et est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu.

Et le théorème de Thalès ?

Considérons un triangle extrait du réseau triangulaire. Divers rapports rationnels (cela semble bien suffisant en classe de quatrième, il sera temps éventuellement en classe de troisième de généraliser pour des rapports réels) pourront être visualisés, tel 7/10 dans l'exemple ci-dessous.



Et le point d'intersection des médianes d'un triangle ?



Ce point est une réelle difficulté pour nos élèves de quatrième.

Imaginons de nouveau une partie locale du réseau triangulaire (cette approche est celle de Henri Lombardi (IREM de Besançon) dans l'article « Eloge du papier quadrillé » 4000 ans d'histoire des mathématiques : les mathématiques dans la longue durée. [5])

Tous les triangles sont symétriques, donc isométriques.

Deux triangles accolés par un côté forment en parallélogramme (utilisation de la symétrie mise en œuvre), leurs diagonales se coupent en leur milieu, ce qui justifie l'égalité des longueurs des segments bleus, médianes des triangles élémentaires.

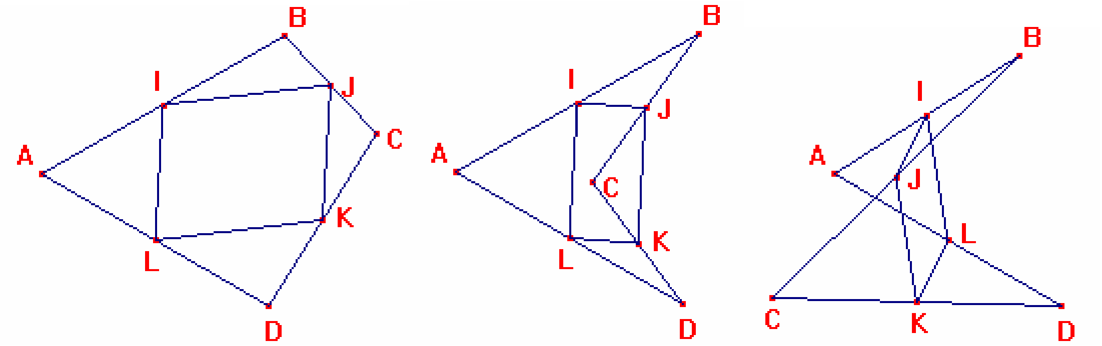
Les rapports « 2 /3, 1/ 3 » sur les médianes sont clairs dans ce cas, la « concourance » des médianes bleues peut apparaître suite à l'observation des diagonales de parallélogrammes qu'elles forment.

[5] Actes du treizième colloque Inter-IREM d'histoire et d'Épistémologie des mathématiques. IREM de Rennes 6-7-8 mai 2000

QUATRIEME : LE PROBLEME DE VARIGNON

Le théorème de Varignon [6]

ABCD étant un quadrilatère quelconque et I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA], le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.



Prérequis pour la démonstration

- Propriétés caractéristiques des quadrilatères (parallélogramme, rectangle, losange, carré)
- Théorème de la droite des milieux

Variantes

- On peut proposer cet exercice en Quatrième, juste après la droite des milieux, ou plus tard en réinvestissement.
- Il peut être proposé aussi en introduction des translations.
- En Troisième ou en Seconde, à n'importe quel moment de l'année.
- Il peut être traité avec l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, soit sur poste (les élèves manipulent eux-mêmes), soit avec vidéo-projecteur (figure visible par toute la classe en même temps) ou bien sans ordinateur.

Compte-rendu 1

Catherine Chaduteau

Durée : 2 heures

Le problème est posé sous la forme suivante :

Enoncé
ABCD est un quadrilatère.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

[6] Pierre Varignon : mathématicien français né à Caen en 1654 et mort à Paris en 1722.

Figure

- Les élèves font une figure dans leur cahier. Un recensement permet de faire ressortir que IJKL peut être un parallélogramme, un rectangle, un losange ou même un carré. Les élèves font rapidement remarquer que le rectangle, le losange et le carré sont des parallélogrammes particuliers. Personne, cependant, n'obtient un quadrilatère IJKL qui n'est pas, au minimum, un parallélogramme. IJKL serait-il donc toujours un parallélogramme ?
- Le professeur, quant à lui, peut, au lieu de faire une figure au tableau, utiliser un logiciel de géométrie. Cela a au moins deux avantages :

1. La figure peut être déformée, ce qui permet de ne pas s'attacher à une figure particulière.
2. Les élèves n'abandonnent pas leur figure personnelle pour choisir celle du tableau. La figure projetée peut, au contraire, les aider à mieux repérer les configurations présentes sur leur propre figure.

Démonstration

Il s'agit de montrer que IJKL est un parallélogramme quel que soit le quadrilatère ABCD de départ.

Trois démonstrations peuvent être envisagées :

1. Montrer que les côtés opposés de IJKL sont parallèles.
2. Montrer que les côtés opposés de IJKL sont de même longueur.
3. Montrer que deux côtés opposés de IJKL sont parallèles et de même longueur.

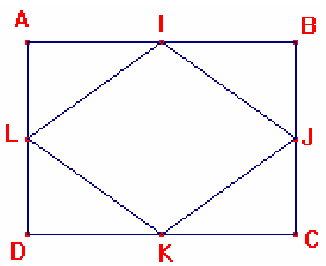
Aide : Faire apparaître une configuration connue (triangle avec des milieux) en traçant une (ou deux) diagonales(s).

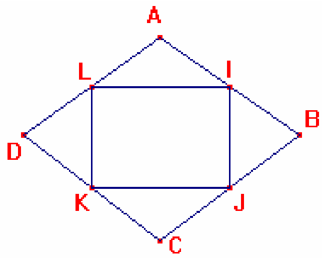
On peut demander aux élèves de rédiger une démonstration en classe et une (ou deux) autre(s) à la maison.

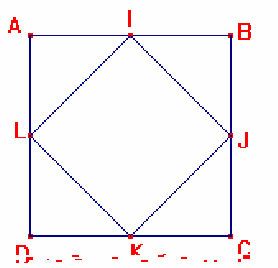
Etude des cas particuliers (deuxième heure)

Les élèves conjecturent facilement les propriétés suivantes :

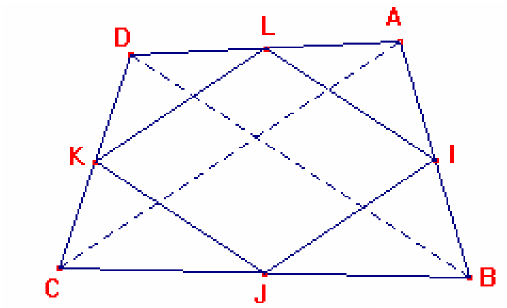
- Si ABCD est un rectangle, alors IJKL est un losange.
- Si ABCD est un losange, alors IJKL est un rectangle.
- Si ABCD est un carré, alors IJKL est un carré.

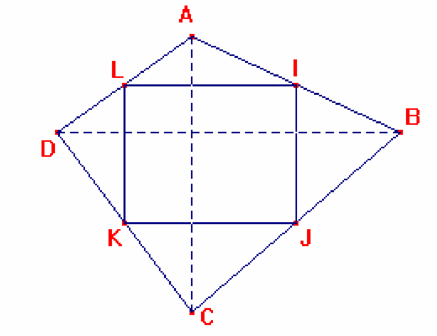


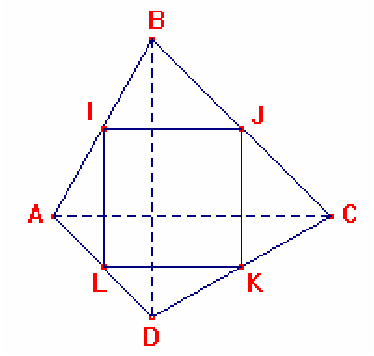




Mais en partant d'un losange IJKL, on peut trouver un quadrilatère ABCD « autour » qui n'est pas rectangle…(même remarque pour les autres propriétés). Il suffirait donc d'une condition moins forte sur ABCD pour que IJKL soit losange. Là encore, le logiciel de géométrie peut s'avérer très utile pour découvrir plus facilement des configurations dans lesquelles ABCD n'est ni un rectangle, ni un losange.







On arrive finalement à conjecturer que :

- Pour que IJKL soit un losange, il faut que ABCD ait des diagonales de même longueur.
- Pour que IJKL soit un rectangle, il faut que ABCD ait des diagonales perpendiculaires.
- Pour que IJKL soit un carré, il faut que ABCD ait des diagonales de même longueur et perpendiculaires.

La démonstration est faisable par les élèves, mais demande du temps. (On peut au moins la faire oralement pour que les élèves intéressés ne soient pas frustrés.)
Par contre, en travail à la maison, on peut demander de tracer :

- un quadrilatère ABCD non rectangle pour que IJKL soit losange
- un quadrilatère ABCD non losange pour que IJKL soit rectangle
- un quadrilatère ABCD non carré pour que IJKL soit carré.

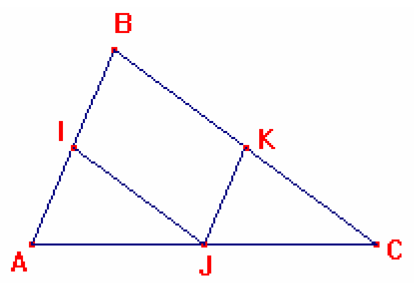
Prolongement possible

1. Montrer que le périmètre du parallélogramme de Varignon est égal à la somme des longueurs des diagonales du quadrilatère.
2. Montrer que l'aire du parallélogramme de Varignon est la moitié de celle du quadrilatère (non croisé).

Version allégée : autre exercice

Enoncé

ABC est un triangle.
I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [AB], [AC] et [BC].
Quelle est la nature du quadrilatère BIJK ?



Prérequis

Les mêmes.

Figure

BIJK est au minimum un parallélogramme.

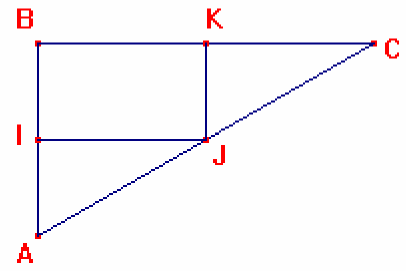
Démonstration

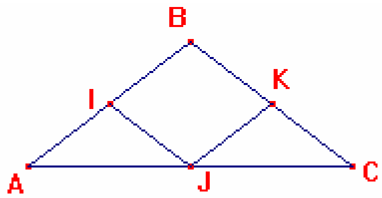
Les mêmes propriétés interviennent, mais la démonstration est plus facile, car il n'est pas nécessaire de faire des tracés supplémentaires.

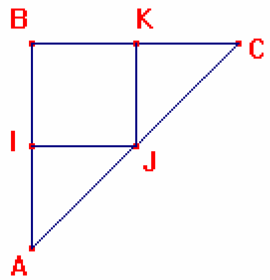
Cas particuliers

- Si ABC est rectangle en B, alors BIJK est un rectangle.
- Si ABC est isocèle en B, alors BIJK est un losange.
- Si ABC est rectangle et isocèle en B, alors BIJK est un carré.

La réciproque de chacune de ces propriétés est vraie.







Prolongement possible

1. Exprimer le périmètre de BIJK en fonction de celui de ABC.
2. Exprimer l'aire de BIJK en fonction de celle de ABC.

Compte-rendu 2

François Drouin

Consignes :

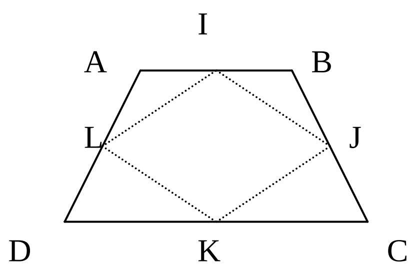
Individuellement, tracez chacun cinq quadrilatères de formes différentes (certains peuvent être des quadrilatères particuliers, mais pas les cinq). Pour chaque quadrilatère, tracez les milieux des quatre côtés. Que pouvez-vous dire du quadrilatère ayant comme sommets ces quatre milieux ?
En groupe, comparez ce que vous pensez de ce quadrilatère et essayez d'élaborer une preuve.

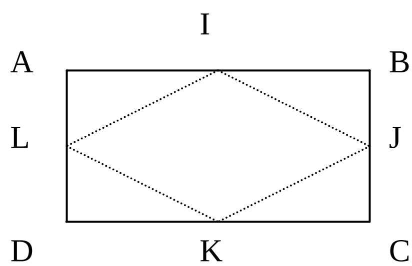
Quelle(s) condition(s) imposer au quadrilatère ABCD pour que le quadrilatère IJKL soit un losange ? un rectangle ? un carré ?

Réponses des élèves

Un losange

Propositions d'élèves :

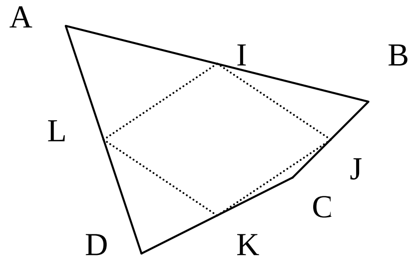




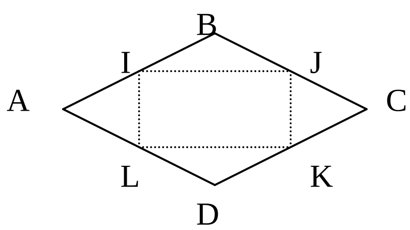
Questions de l'enseignant :
Si ABCD est un trapèze isocèle ou si ABCD est un rectangle, pourquoi êtes-vous sûrs que le quadrilatère IJKL est un losange ?
Existe-t-il d'autres types de quadrilatères ABCD tels que le quadrilatère IJKL soit un losange ?

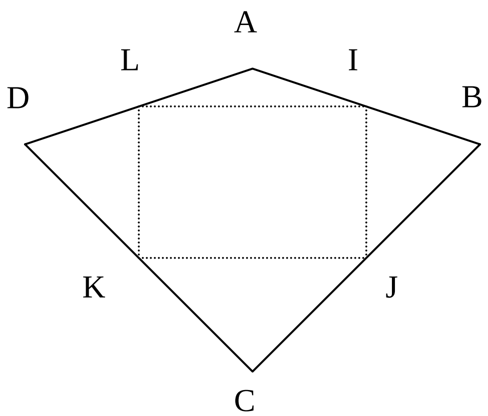
L'utilisation du théorème de Varignon pour prouver que le quadrilatère IJKL est un losange montre l'importance de l'égalité de longueur des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du trapèze isocèle ABCD et du rectangle ABCD (le trapèze isocèle admet un axe de symétrie).

D'autres quadrilatères ABCD ayant des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ de même longueur sont alors envisagés.



Un rectangle
Propositions d'élèves :

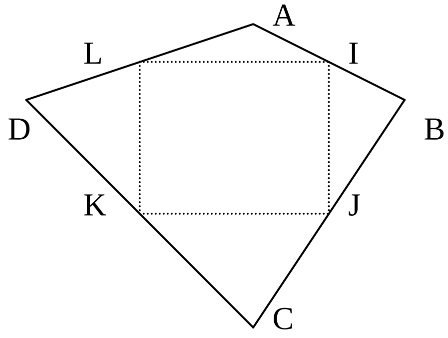




Questions de l'enseignant :
Si ABCD est un losange ou si ABCD est un « cerf-volant », pourquoi êtes-vous sûrs que le quadrilatère IJKL est un rectangle ?
Existe-t-il d'autres types de quadrilatères ABCD tels que le quadrilatère IJKL soit un rectangle ?

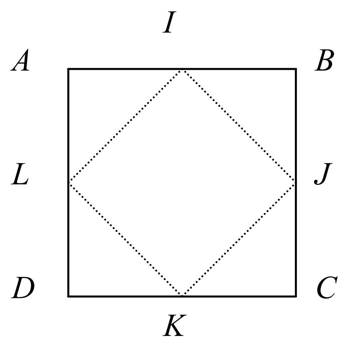
L'utilisation du théorème de Varignon pour prouver que le quadrilatère IJKL est un rectangle montre l'importance du fait que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ sont perpendiculaires.

D’autres quadrilatères ABCD ayant des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ perpendiculaires sont alors envisagés.



Un carré

Proposition d’élève :



Questions de l’enseignant :
Si ABCD est un carré, pourquoi êtes-vous sûrs que le quadrilatère IJKL est un carré ?
Existe-t-il d’autres types de quadrilatères ABCD tels que le quadrilatère IJKL soit un carré ?

Les deux études précédentes nous permettent d’affirmer :
Si le quadrilatère ABCD a ses diagonales de même longueur, je suis sûr que le quadrilatère IJKL est un losange.
Si le quadrilatère ABCD a ses diagonales perpendiculaires, je suis sûr que le quadrilatère IJKL est un rectangle.
Si le quadrilatère ABCD a ses diagonales de même longueur et perpendiculaires, je suis sûr que le quadrilatère IJKL est un losange et un rectangle. C’est donc un carré.

Remarques :

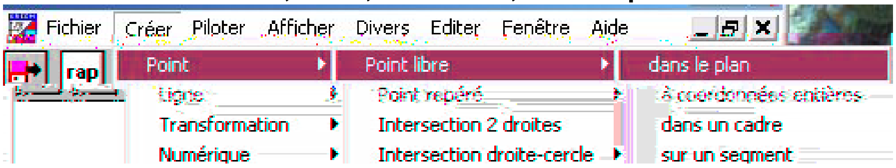
Ce type d’activité semble intéressant à étudier à l’aide d’un logiciel de géométrie dynamique.
Les élèves pourraient par déformation de la figure de départ également rencontrer les différents cas particuliers et étudier ce qui conduit aux quadrilatères demandés.

Sans porter de jugement sur la pertinence de l’emploi d’un tel logiciel, un autre choix a prévalu : le tracé préalable par chaque élève de cinq quadrilatères permet de garder une trace écrite des essais des élèves et de tenter un tri entre les différents cas rencontrés. Le travail en groupe permet une confrontation des quadrilatères rencontrés. De plus les cas particuliers rencontrés ont été dessinés comme tels par les élèves et non rencontrés « par hasard » lors de déplacements de points. Les propriétés caractérisant ces cas particuliers peuvent être mises à contribution pour la recherche demandée.

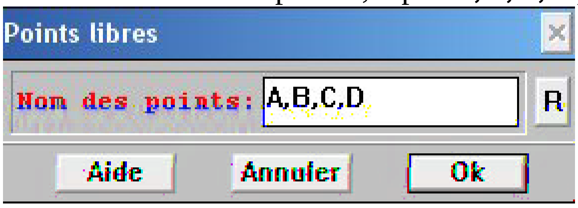
Varignon : fiche Geoplan

Pol Le Gall

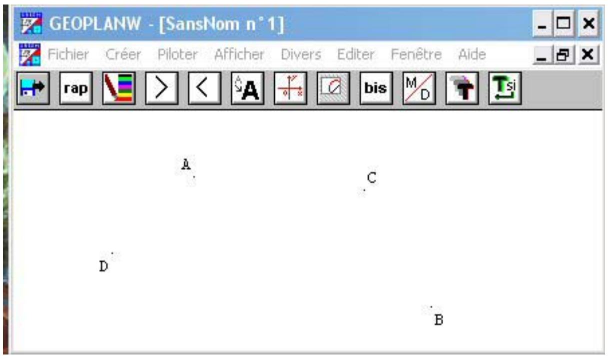
Ouvrir GEOPLAN
Cliquer successivement sur : **Créer, Point, Point libre, Dans le plan.**



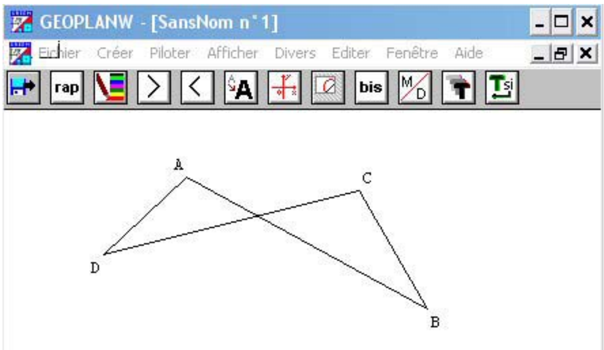
Une fenêtre s'ouvre demandant les noms des points ; taper **A,B,C,D** puis cliquer sur **Ok**.



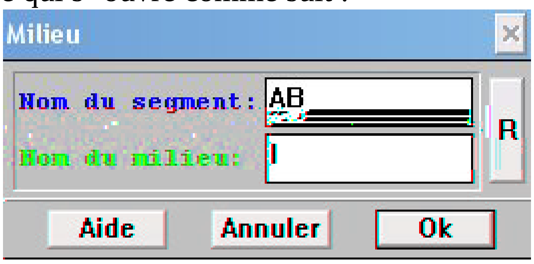
Quatre points apparaissent, on va maintenant tracer le quadrilatère.



Cliquer successivement sur : **Créer, Ligne, Segment.**
Dans la fenêtre qui apparaît, taper : **AB,BC,CD,DA** puis cliquer sur **Ok**.
Le quadrilatère ABCD est à l'écran.



Approcher la souris du point A et appuyer sur le bouton gauche. Le pointeur prend la forme d'une main et en gardant le bouton gauche enfoncé on peut déplacer le point A. Faire quelques essais de déformation du quadrilatère ABCD.
Placer le milieu I du segment [AB]. Pour cela, cliquer successivement sur : **Créer, Point, Milieu** et remplir la fenêtre qui s'ouvre comme suit :



Cliquer sur Ok.
Placer de même les milieux J de [BC], K de [CD] et L de [AD].
Puis tracer les segments [IJ], [JK], [KL] et [LI].
Que peut-on supposer pour le quadrilatère IJKL ?
Déformer le quadrilatère ABCD afin de vérifier que votre hypothèse résiste.
Ecrire cette hypothèse ci-dessous :

Le quadrilatère IJKL semble être …………………………………………………………………

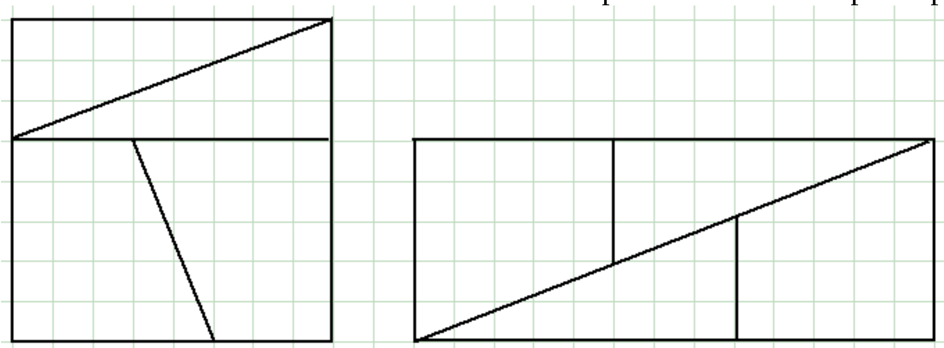
Tracer les segments [AC] et [BD] en pointillé rouge. (*Pour modifier la couleur ou la forme d'un trait, il faut appuyer sur l'icône arc en ciel, puis choisir sa couleur et pointer les segments que l'on veut transforme*r)
Déformer le quadrilatère ABCD ; que peut-on supposer pour les segments [AC] et [BD] ?
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
On va afficher des longueurs.
Pour afficher la longueur IJ, il faut procéder comme ceci : cliquer successivement sur **Créer, Affichage,**
Longueur d'un segment.
Une fenêtre s'ouvre pour demander la longueur que l'on souhaite : taper **IJ** dans la première case, **2** dans la deuxième case et ne pas toucher à la troisième case.
Afficher ainsi les longueurs IJ, JK, KL et LI.
Déformer ABCD jusqu'à ce que IJKL soit un losange.
Formuler une hypothèse :
Pour que IJKL soit un losange, il faut que ………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
Comment peut-on vérifier cette hypothèse ?
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
Effectuer cette vérification.
On va afficher des mesures d'angles. Pour cela : cliquer successivement sur **Créer,**

QUATRIEME : LE PARADOXE DE LEWIS CAROLL

Pol Le Gall

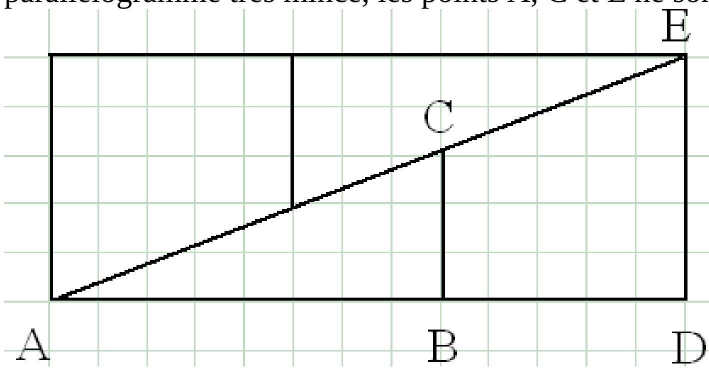
Rappel du paradoxe

On doit à Lewis Caroll la mise en évidence du paradoxe constitué par le puzzle ci-dessous :



Suivant la manière dont les pièces sont agencées, il semble que l'on puisse obtenir un carré de côté 8 ou un rectangle dont les dimensions mesurent 5 et 13.
Donc, par égalité des aires, on aurait : 64 = 65.

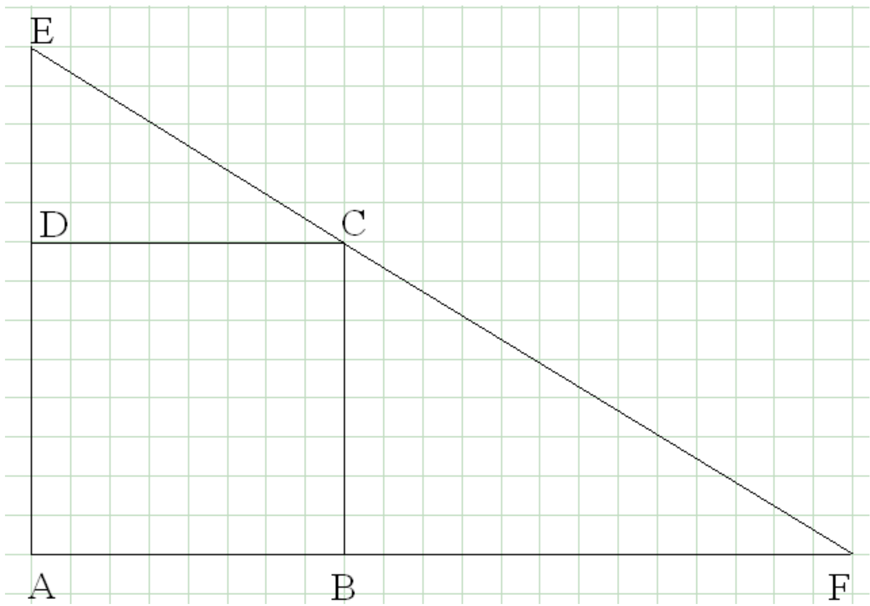
L'erreur réside dans le fait que la diagonale apparente du rectangle est en réalité un parallélogramme très mince, les points A, C et E ne sont pas alignés.



Le coefficient directeur de la droite (AC) est 3/8 tandis que le coefficient directeur de (CE) est 2/5 et que celui de (AE) est 5/13. On aura reconnu trois fractions du type F_n/F_{n+1} où (F_n) désigne la suite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ,34 …
Les trois coefficients directeurs sont donc trois termes d'une suite convergeant vers l'inverse du nombre d'or. Les trois valeurs sont suffisamment proches pour rendre la rupture d'alignement imperceptible à l'œil.
En partant de cette situation, on peut proposer une activité dérivée.

Le problème proposé

L'enseignant demande aux élèves de construire la figure suivante :
"Tracer un carré ABCD tel que AB=8 cm.
Placer E sur la demi-droite [AD) tel que DE=5 cm.
Placer F sur la demi-droite [AB) tel que BF=13 cm.
Tracer les triangles CDE et CBF.
Calculer l'aire du triangle AEF."



Le déroulement dans une classe de quatrième

Le contexte : le problème est posé en milieu d'année, la classe a déjà étudié les propriétés de Pythagore et de Thalès.

La consigne est donnée telle quelle est écrite plus haut, le professeur effectue lui-même une figure au tableau, aux instruments.
En posant le problème de cette manière on court le risque de passer à côté du paradoxe si tous les élèves procèdent de la même façon, mais en dirigeant les élèves vers les deux procédures on indique un peu le piège.

De fait les élèves ont utilisé les deux procédures attendues :

- Calcul direct : le triangle AEF est rectangle donc son aire s'obtient en calculant AE×AF/2, donc l'aire mesure 13×21/2 = 136,5 cm²
- Calcul en décomposant la figure : l'aire de ABCD mesure 64 cm², celle de CBF mesure 8×13/2 = 52 cm² et celle de CDE mesure 8×5/2 = 20 cm². L'aire de AEF mesure donc : 64+52+20=136 cm².

On ne trouve donc pas la même chose, et les deux résultats sont représentés d'une façon suffisamment nombreuse pour que chacun des élèves soit rassuré quant au fait qu'il ne s'agit pas d'une erreur de calcul personnelle. "D'autres trouvent comme moi !".
L'enseignant demande à ce qu'on se mette d'accord.. Il anime le débat.
Dans un premier temps celui-ci est aussi stérile que radical : "Ils se sont trompés !". Qui c'est "ils" ?, "Les autres, ceux qui trouvent l'autre résultat !..."
Le débat s'organise, un représentant de chaque bord vient présenter sa démarche au tableau. Les élèves du camp d'en face ne laissent rien passer en ce qui concerne la rigueur des justifications : "Comment tu sais que le triangle BCF est rectangle ?".
Quand les deux démarches ont été passées au crible, la situation n'est pas débloquée pour autant. Il y a toujours un demi centimètre carré d'écart et pourtant tous les calculs sont justes.

L'enseignant aimerait guider les élèves vers une utilisation de la propriété de Thalès dans le sens contraposé. Il avance : "Cette configuration, cela ne vous rappelle rien ?". La réponse vient assez vite car le chapitre a été traité récemment. "C'est comme Thalès".

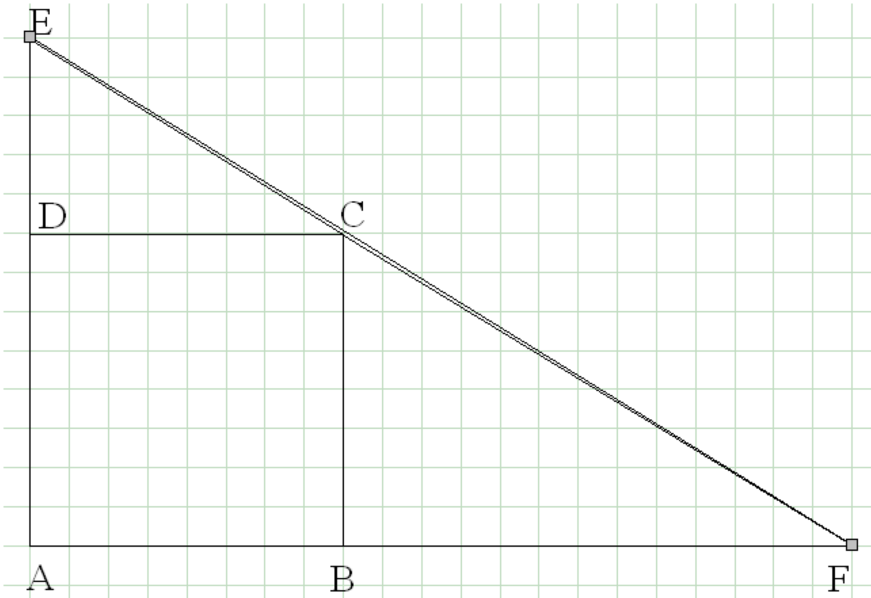
L'enseignant propose alors de vérifier que "Thalès fonctionne" (après tout, il semblerait que tout dysfonctionne dans cette figure…) et demande à la classe quelles égalités on pourrait écrire s'il s'agissait bien d'une configuration de Thalès.
Les élèves répondent docilement, le résultat est frais et disponible :
FA/FB=FE/FC=AE/BC.
On vérifie avec les données directement connues :
FA/FB=21/13 et AE/BC = 13/8.
On compare 21/13 et 13/8, certains élèves prennent la calculatrice, d'autres constatent que ces fractions ne sont pas égales car "on n'a pas le produit en croix".
Donc Thalès ne s'applique pas !

On cherche la panne… Pourquoi Thalès ne s'applique-t-il pas ? La première idée qui vient aux élèves c'est que les droites (BC) et (AE) ne sont pas parallèles. Petit débat, on vérifie tout, on est sûr des angles droits car l'énoncé dit que ABCD est un carré, or deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles, aucun doute là-dessus. L'objection est levée.

A ce stade là, les élèves sont découragés. Ils ne voient pas où pourrait être la faille.
Un élève propose de calculer EF et CF afin de vérifier le troisième rapport, avec l'espoir que celui-là fonctionne !
Cette proposition, a priori peu pertinente, va débloquer la situation. Les troupes reprennent de la vigueur : "Pythagore ! On peut utiliser Pythagore". Pythagore arrive à point nommé pour suppléer Thalès déficient, belle solidarité des super-héros de la géométrie !

Les élèves s'attaquent en ordre dispersé au calcul des longueurs inconnues.
Il pitonnent sur leurs calculatrices et trouvent EF=24,7 ou 24 ou 25 ou 24,69… suivant la qualité des arrondis effectués.
De même ils trouvent CF=15,2 ou 15,26 ou 15 ou ….
Suivant les arrondis, la valeur de AF/CF est plus ou moins éloignée des deux autres valeurs trouvées pour FA/FB et FE/FC.

Une élève propose d'utiliser le théorème de Thalès "dans l'autre sens", c'est-à-dire en exploitant les autres parallèles (AF) et (CD). Elle s'emploie directement à calculer EC, qui est la seule distance qu'elle ne connaît pas.
La situation étant bloquée, le professeur voit là une issue et demande la valeur à l'élève.
L'élève répond : 9,4 cm
Un miracle se produit… Un autre élève trouve curieux que l'on ait EF=24,7, CF=15,2 et EC=9,4. Il dit "Là aussi, il manque un millimètre".
Le débat est relancé : "C'est vrai, ça devrait finir par un 6", "C'est sûrement parce qu'on a trop arrondi".
On décide d'être précis. On reprend les calculatrices et on garde davantage de décimales.
Dès lors : EF = 24,69818, CF = 15,26434 et EC = 9,43398
Donc CF+EC = 24,69832.
On constate donc que l'écart était loin de valoir un millimètre, mais qu'il existe.
Il faut encore un moment de réflexion et une intervention de l'enseignant pour que les élèves comprennent enfin d'où vient l'erreur. "Les points E, C et F ne sont pas alignés". Un élève finit par le dire, mais personne ne le croit. Ils se penchent à nouveau sur leur figure et tracent.



Ce n’est qu’après avoir constaté "de visu" que le point C n’est pas sur (EF) que les élèves sont vraiment convaincus.

Bilan

L’activité a duré une heure.
Les élèves ont manifesté un besoin de justification lors des moments de débat.
Ils ont eu recours à des résultats divers de leur boîte à outils géométrique. Ils ont fait preuve d’initiatives.
La solution espérée par le professeur, l’utilisation de la propriété de Thalès, n’a pas été comprise. Le détour par les calculs de rapports a complexifié le mystère au lieu de donner une piste de résolution.
Le problème posé est difficile car l’objet du délit, le segment [EF], est invisible. C’est son apparition au dénouement qui clôt l’enquête. Le problème reposait sur une illusion d’optique, il n’est pas étonnant qu’il ne puisse être vraiment conclu que par l’image.

CINQUIEME : PROBLEMES DE DISTANCE

Recherche d'un point équidistant de trois autres points.

Laurent Marx

Enoncé

Fontoy, Lommerange et Knutange ont décidé de construire une piscine.
Pour décider le lieu de construction, les maires des villages se sont mis d'accord : la piscine doit être située exactement à égale distance (à vol d'oiseau) des trois villes.

Par groupes de quatre, aidez les maires des villages à trouver l'emplacement de cette nouvelle piscine.
Votre recherche doit être précise. Vous devez pouvoir expliquer votre méthode de recherche pour trouver le lieu de la nouvelle piscine.

Objectifs

- mettre les élèves dans une situation de recherche,
- trouver le point d'intersection des médiatrices dans un triangle en cherchant un point équidistant des trois sommets,
- découvrir le cercle circonscrit à un triangle,
- démonstration de la concourance des médiatrices.

Prérequis : propriété de la médiatrice d'un segment.

Situation en classe : par groupes de 4, les élèves doivent chercher le point situé à égale distance de trois points donnés.

Organisation de la séance : on laisse chercher les élèves pendant quelques minutes. Pour les élèves en difficulté, on peut proposer une simplification du problème.
Au lieu de faire la recherche avec 3 villes, on fait la recherche pour 2 villes.
Si les élèves proposent le milieu, il faut leur demander de trouver d'autres positions pour la piscine.
Si les élèves proposent la médiatrice, on leur propose de recommencer ensuite en choisissant à chaque fois deux villes.
L'objectif est de leur faire construire les médiatrices des côtés du triangle formé par les trois villes et de faire apparaître le fait que les trois médiatrices sont concourantes.

Lorsque les élèves ont terminé, on leur demande de trouver toutes les villes qui sont à la même distance de la piscine que Fontoy.
L'objectif est de faire dessiner le cercle circonscrit.

2ème heure
En gardant le support de l'énoncé, le professeur démontre à la classe que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.
Il est important pour cette démonstration de bien avoir revu les deux propriétés suivantes :

Propriété 1
Si M est un point de la médiatrice d'un segment [AB] alors M est situé à égale distance de A et de B.

Propriété 2
Si M est un point situé à égale distance de A et B, alors M est sur la médiatrice d'un segment [AB].

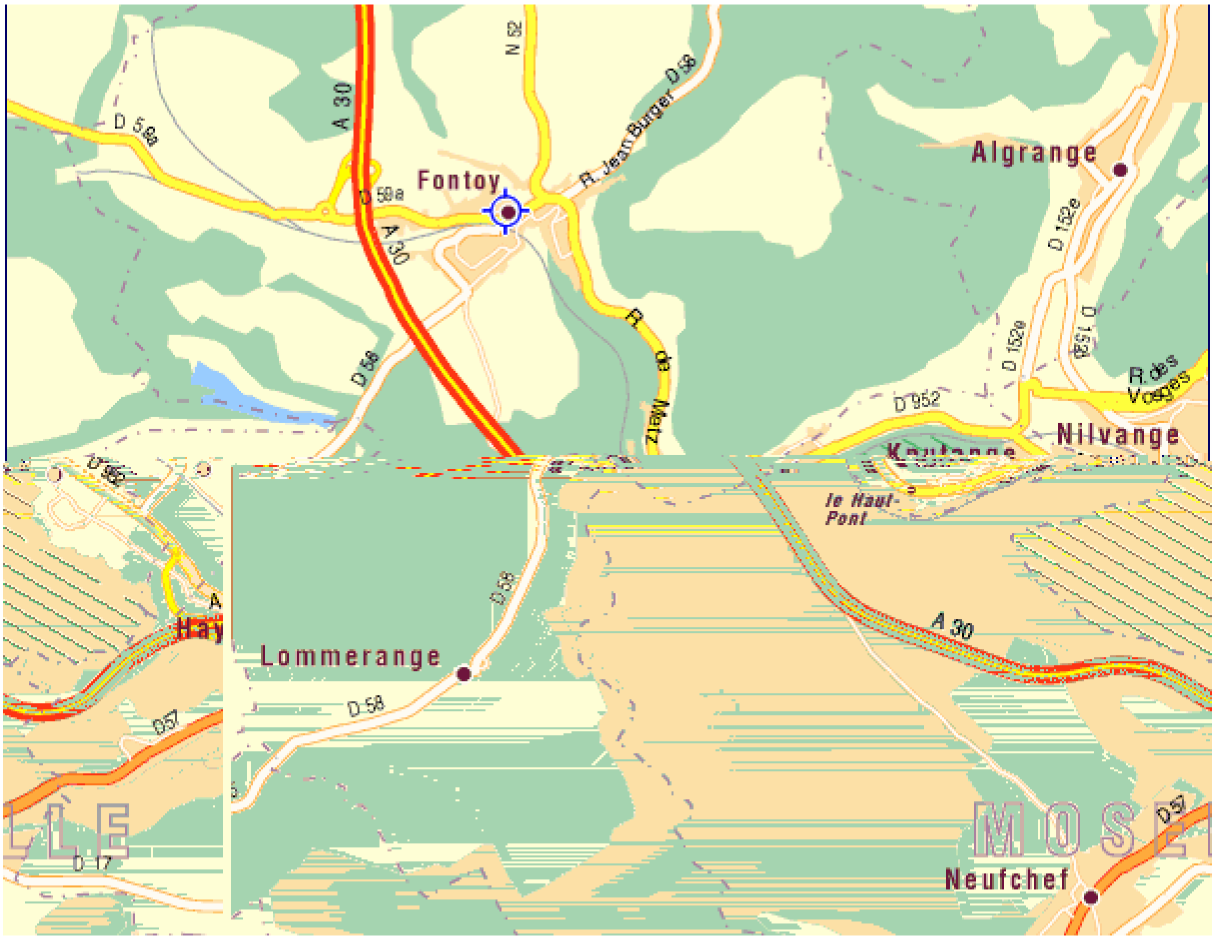
Ce qui s'est passé pendant la séance

- Les élèves ont du mal à se lancer dans une démarche de recherche : ils essayent par tâtonnement en utilisant le compas et la règle pour reporter des mesures. Ils n'ont pas le souci d'obtenir une construction du centre de manière précise, ils sont satisfaits lorsqu'ils trouvent une "zone" dans laquelle se trouve le centre du cercle circonscrit.
- Aucun groupe n'a pensé à construire les médiatrices. La simplification du problème en passant par la recherche pour deux villes est indispensable. A ce moment là, l'introduction de la médiatrice est naturelle.
- Le constat que les médiatrices sont concourantes n'est pas facile par manque de précision.
- Pour la dernière question, les élèves ont rapidement pensé à tracer un cercle qui a pour centre le point d'intersection des médiatrices.

Fiche élève : la nouvelle piscine

Fontoy, Lommerange et Knutange ont décidé de construire une piscine.
Pour décider le lieu de construction, les maires des villages se sont mis d'accord : la piscine doit être située exactement à égale distance (à vol d'oiseau) des trois villes.

Par groupe de quatre, aidez les maires des villages à trouver l'emplacement de cette nouvelle piscine.
Votre recherche doit être précise. Vous devez pouvoir expliquer votre méthode de recherche pour trouver le lieu de la nouvelle piscine.



Existe-t-il d'autres villes qui sont à la même distance de la piscine que Fontoy ?

D’autres exercices de recherche de lieu…

1.

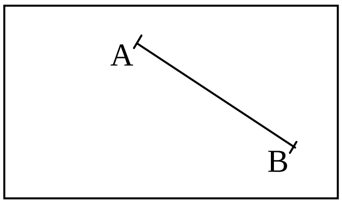
a) La ville de Fontoy veut construire une nouvelle salle des fêtes, car la salle existante pose des problèmes de nuisances sonores pou

Problèmes ouverts concernant les questions de distances

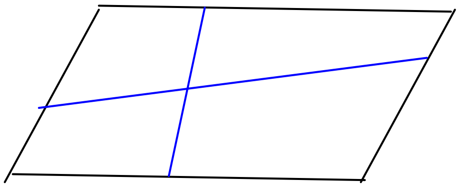
Points équidistants

1) $D_1//D_2$ et D_3 est sécante à D_1 et D_2. Déterminer les points qui sont à égale distance des trois droites.

2) Tracer un segment quelconque à l'intérieur d'une feuille A4. Déterminer l'ensemble des points de la feuille situés à la distance x du segment. (Envisager différents cas de figure)



3) Déterminer les points intérieurs à un parallélogramme équidistants de deux droites traversant le parallélogramme.
(remarque : on entend la distance d'un point à une droite comme la distance la plus courte entre le point et un point de la droite, intérieur au parallélogramme)



4) Déterminer l'ensemble des points du plan équidistants de deux demi-droites de même origine.

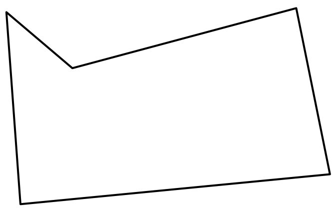
5) Déterminer les points situés à une distance donnée x d'un carré de côté a. (différents cas de figures suivant x et a)

6) Déterminer l'ensemble des droites situées à une distance x d'un point O fixé.

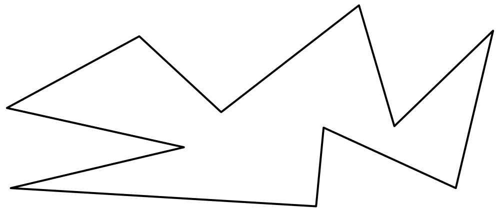
7) Soient A et B deux points distincts, déterminer toutes les droites à égale distance de A et de B.

Gardiens de musée et miradors

1) Si F est une figure du plan, on appelle mirador de F tout point M tel que, quel que soit le point P de F, le segment [MP] soit intérieur à F.
Trouver les miradors de la figure ci-dessous :



2) Combien faut-il placer de gardiens de musée (ou de caméras) dans une salle donnée pour surveiller toute la salle.



Exemple de salle (c'est un musée d'art moderne !) :

Coniques et autres…

Soit D une droite et F un point,

1) déterminer tous les points à égale distance de D et de F.
2) déterminer tous les points deux fois plus près de D que de F
3) déterminer tous les points deux fois plus près de F que de D

Soient A et B deux points distincts, et k un réel positif. Chercher l'ensemble des points M tels que :

MA+MB = k
MA-MB = k
MA×MB = k
MA/MB = k
MA+2MB = k
MA²+MB² = k
MA²-MB² = k
1/MA+1/MB = k
etc...

QUATRIEME : UNE APPLICATION DU THEOREME DE PYTHAGORE

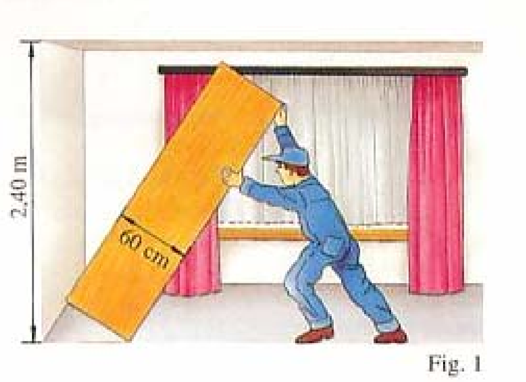
Martine Dechoux

Le contexte

Progression

En géométrie, les élèves ont travaillé sur les spirolatères, les caractéristiques des quadrilatères, puis le théorème de la droite des milieux, et le théorème de Pythagore, direct et réciproque.

Le travail suivant leur est donné en devoir à la maison, sous forme d'une narration de recherche:

> Voici un énoncé de problème. On te demande, bien sûr, d'essayer de trouver la solution, mais aussi de raconter **tout** ce que tu as essayé de faire pour y arriver, **toutes** les idées que tu as eues même si elles n'ont pas abouti, comment tu les as mises en application, pourquoi tu as renoncé si elles n'ont pas abouti et enfin ce que tu as fait pour trouver. La narration de ta recherche comptera autant que la solution. (Tu dois donc travailler seul et noter ce que tu fais au fur et à mesure)
>
> 
>
> Fig. 1
>
> Quelle hauteur maximale devrait avoir l'armoire pour qu'on puisse la mettre en place de la façon indiquée sur la figure ci-jointe ?

Objectifs

- placer les élèves en position de recherche face à un problème de la vie courante
- montrer une application quotidienne d'une propriété mathématique
- mettre les élèves dans l'obligation de rédiger clairement une ou plusieurs démarches de raisonnement
- s'inscrire dans une progression par épisodes vers l'apprentissage du raisonnement déductif et de la rédaction d'une démonstration
- mettre en réussite en mathématiques des élèves qui ne comprennent pas les problèmes en valorisant la recherche et sa rédaction plus que la résolution du problème.

Ce qui s'est passé

<u>Commentaires</u>

Les copies ramassées ont été de quatre types pour ce devoir-ci[7]:

- Celles des élèves ayant vite compris le problème et rédigeant un DM comme d'habitude, mais sans description de recherche ou en "inventant" de fausses fausses-pistes.

[7] On trouve aussi pour ce genre de devoir des copies d'élèves enthousiasmés par l'exercice, ne trouvant pas la solution, mais racontant une recherche épique et abracadabrante avec beaucoup de réalisme

- Celles des élèves décrivant une expérimentation parfois instrumentée (bricolages), réalisant une figure et résolvant correctement le problème.
- Celles des élèves ayant compris ou entendu qu'il s'agissait du théorème de Pythagore et qui ont essayé de l'appliquer quelque part, en utilisant les deux données pour trouver une longueur, mais sans faire de figure et avec plus ou moins de succès dans la narration de recherche, n'ayant pas vraiment cherché.
- Celles des élèves n'ayant rien compris au problème et écrivant n'importe quoi ne sachant pas du tout ce qu'on attend d'eux.

Je laisse entrevoir ainsi les difficultés inhérentes à la correction de ce type de devoir. Les critères ont beau être précis, beaucoup de copies sont surprenantes.
Ils nous font découvrir des aspects de la personnalité de nos élèves que notre matière ne nous permet pas toujours de déceler.
Mais ils s'inscrivent bien dans les objectifs de ce travail.

Autre approche possible

Un autre objectif de ce devoir a été de permettre à un professeur-stagiaire IUFM, en formation pour enseigner en classe européenne, une comparaison des exigences françaises et allemandes en matière de "démonstration". La conclusion de son travail est un formalisme beaucoup plus grand en France: il semblerait qu'en Allemagne, montrer qu'on a compris et su faire suffit, la rigueur des justifications n'est pas exigée.

J'ai donc eu envie de m'affranchir totalement de ces exigences. J'ai proposé ce problème l'année suivante oralement, avec juste le schéma au tableau, un jour où la classe était réduite de moitié. Je l'ai présenté un peu comme un défi à relever.
Quelques uns ont décidé qu'il suffisait de démonter si ça ne passait pas, mais la plupart ont relevé le défi et le nom de Pythagore a fusé très vite. Personne n'a cependant eu l'idée de faire une figure plus mathématique pour voir où appliquer Pythagore, mais on m'a emprunté ma boîte de Kleenex pour matérialiser l’armoire et un grand cahier a figuré le plafond. Cette idée a permis à certains de visualiser le problème qui leur avait échappé au début. Et la solution est arrivée très rapidement: on a écrit au tableau (que) le calcul à faire puisque le bon triangle rectangle avait été désigné. Le tout s'est fait en un petit quart d'heure avec 12 élèves de tous niveaux.

UN PROBLEME OUVERT EN TROISIEME : AUTOUR DES TRIANGLES PYTHAGORICIENS

Isabelle Jacques

Prérequis

Développement et factorisation simple avec un facteur commun.
Théorème direct de Pythagore.
Equation produit (notion).
Equation du premier degré.
Notion d'entiers consécutifs.

Objectifs

Tester exemples et contre-exemples.
Définir les inconnues et leurs caractéristiques.
Découvrir l'intérêt de savoir résoudre une équation du second degré.
Montrer la puissance du raisonnement sur une inconnue pour faire une démonstration.
Donner un exemple de démonstration dans le cadre du calcul littéral.

Déroulement

Préliminaires

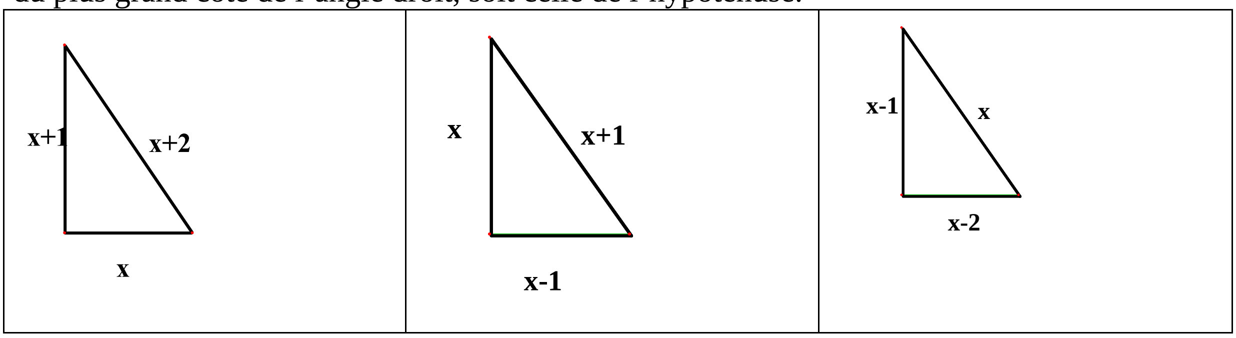
Faire émerger des élèves le triangle rectangle 3-4-5 et sa particularité en essayant de faire apparaître la notion d'entiers consécutifs.

Position du problème

Existe-t-il d'autres triangles rectangles que le fameux : « 3-4-5 », dont les mesures des côtés sont des entiers successifs ?

Organisation

- Temps personnel laissé à des essais.
- Définition des inconnues par un échange.
- En fonction des essais de certains élèves : organisation de la classe en trois groupes choisissant pour l'inconnue de base soit la mesure du plus petit côté de l'angle droit, soit celle du plus grand côté de l'angle droit, soit celle de l'hypoténuse.



- Travail de chaque groupe aboutissant à trois équations du second degré :

(1) $x^2-2x-3=0$	(2) $x^2-4x=0$	(3) $x^2-6x+5=0$

- Echange sur l'équation possible à résoudre (2) pour les élèves et sa résolution.
Etude du cas : x=0

Conclusion.

Prolongement

Avec les meilleurs élèves, possibilité de résoudre les deux autres équations (1) et (3) en mettant en évidence une factorisation respectivement par (x-3) et (x-5).

UNE RECHERCHE EN TROISIEME : LES HEXAGONES PAVEURS

François DROUIN

Remarques préliminaires

La situation décrite peut être prise comme une suite de ce qui a été fait en classe de quatrième à propos des spirolatères : la recherche est lancée en classe sans savoir au préalable où elle va aboutir. Bien que le contenu ne se réfère pas à un point précis du programme, des choses vues les années précédentes sont rencontrées. J'ai aussi bénéficié du fait que la moitié des élèves de la classe avaient utilisé les spirolatères en classe de quatrième et avaient donc vécu ce type de recherche.
Il est à noter que la situation proposée nécessite d'avoir du temps : j'ai profité d'une cinquième heure hebdomadaire accordée exceptionnellement aux classes de troisième du collège.
Enfin, la participation (non prévue au départ…) d'une universitaire pour relancer la recherche des élèves rend leur travail proche de ce qui est proposé dans le cadre de « Maths en J.E.A.N.S. ».

Conditions de l'expérimentation

En classe de quatrième

En travaillant sur des quadrillages, nous avions constaté que tout quadrilatère pave le plan (activité dite du « carreleur » présentée dans le Petit Vert de Septembre 2005, revue de l'APMEP Lorraine). Le rôle des symétries centrales est apparu, ainsi que celui des translations dans la poursuite des dessins, en particulier à l'aide de coloriages.
Les sommets des quadrilatères étant des nœuds du quadrillage, les élèves ne se sont pas inquiétés de savoir si la « jonction » se faisait bien après le tracé des quadrilatères symétriques par rapport au milieu des côtés du quadrilatère de départ (les quatre coins se garnissaient bien…).

En troisième

Les élèves ont eu exceptionnellement 5 heures hebdomadaires et une des heures du mercredi fut intitulée « heure projet ».

Déroulement de l'expérimentation

Pendant deux mercredis de septembre

La moitié de la classe était issue d'une quatrième qui avait rencontré les « spirolatères » et le pavage du plan par des quadrilatères. Ce pavage a été revu rapidement, avec l'aide de ceux qui avaient déjà rencontré l'activité.
Nous avons ensuite travaillé avec les instruments de dessin, sans utiliser les nœuds du quadrillage. La jonction se faisait-elle parfaitement ? Pour beaucoup, oui, pour d'autres, les dessins laissaient à désirer.

Un premier quadrilatère tracé, il s'agissait de tracer les huit quadrilatères l'entourant en formant le début du pavage. Les quatre premiers tracés faits (symétriques par rapport au milieu des côtés), restaient à combler les « trous » aux quatre coins.

La question posée a été : est-on sûr que le polygone tracé comble parfaitement le trou laissé « au coin » ?

Pour les élèves, pas de problème pour faire coïncider les longueurs (les symétries centrales qui interviennent conservent les longueurs). Le débat a été lancé en classe pour savoir s'il existait un trou, s'il y avait chevauchement ou parfait emboîtement. La nécessité d'obtenir 360° comme total des 4 angles intervenant à chaque « sommet » du pavage fut presque immédiate. Etait-on sûr d'avoir ces 360° ?
Première remarque : on le voit bien, c'est évident.
Méfiance de certains de mes anciens élèves de quatrième à qui j'avais fait rencontrer le « puzzle de Lewis Carrol » visualisant 64=65. Ils ont fait comprendre aux autres que voir n'était pas une preuve.

Deuxième remarque d'une élève, Sibel : « Lorsque les quadrilatères sont des carrés, on a 4 fois 90° donc 360° ». Peu de réaction des élèves. Je leur ai dit « Sibel nous a prouvé le résultat dans l'exemple qu'elle propose, a-t-elle prouvé ce qui était demandé ? ».
Réaction d'une élève : « ah non, ce n'est qu'un exemple ».

Je crois que ce qui les a fait réagir est le fait que Sibel travaillait avec un polygone bien particulier alors qu'en classe nous avions travaillé avec des polygones convexes et concaves plus quelconques. Je ne sais pas comment ils auraient réagi si elle avait trouvé une preuve pour le quadrilatère précis dessiné au tableau.

Je les ai donc lancés dans une preuve valable pour tout type de polygone.
Violaine a très rapidement expliqué à la classe que les 4 angles intervenant autour d'un sommet étaient les 4 angles d'un des quadrilatères. Lorsque j'ai demandé pourquoi nous étions sûr que la somme des angles du quadrilatère était 360°. Violaine, encore elle…a très (trop ?) rapidement évoqué le tracé d'une diagonale et la somme des angles de deux triangles.

J'ai mal géré cette partie D'une part, je me suis fait avoir par la rapidité d'intervention de Violaine, d'autre part, pour les élèves qui n'ont pas vu le travail sur les « spirolatères », je suis trop vite passé sur les aspects « méfiez-vous de ce que vous voyez », « un exemple peut-il servir de démonstration ». Il aurait fallu que je titille un peu plus mes « nouveaux élèves ».

Prolongement proposé pour le mercredi 24 Septembre : Que se passe-t-il pour des hexagones ? Dessinez 9 hexagones identiques. Découpez les. Votre modèle d'hexagone pave-t-il le plan ? (10 minutes avant la sonnerie).
Un élève en difficulté n'a pas voulu faire les découpages et s'est contenté de dessiner. Est apparu un pavage…

Mercredi 24 Septembre

Travail en groupe

Mise en commun des trouvailles et recherche de caractérisations d'hexagones pavant le plan.

Consignes

Tous les hexagones peuvent-ils paver votre feuille de papier ?
Si non, pourquoi ?
Si oui, comment reconnaître ceux qui pavent ?

Déroulement prévu

Mise en commun des travaux faits à la maison. Si nécessaire, nouveaux essais.
Essai d'écriture de phrases indiquant comment reconnaître les modèles d'hexagone pavant le plan. (20 minutes).
Mise en commun entre les groupes (10 minutes)
Choix de phrases qui semblent vraies. (10 minutes)

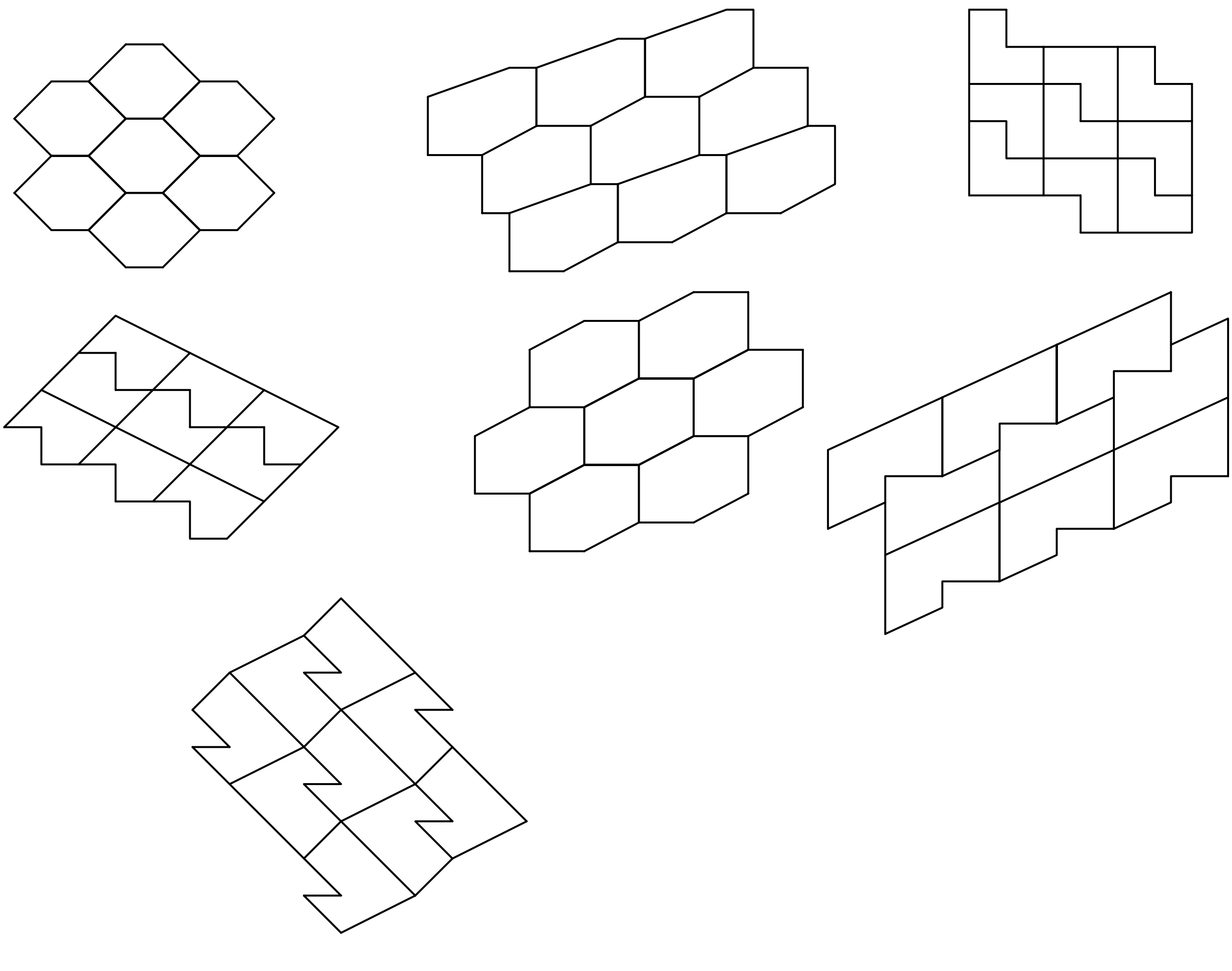
Essais de recherche de preuves. (15 minutes puis à poursuivre à la maison)

Ce qui s'est passé

Un nombre important d'élèves a refusé de faire les découpages et a travaillé directement « papier crayon ». Ils n'avaient que des hexagones « paveurs ».
J'ai redemandé de partir d'un hexagone découpé 9 fois. Certains ont encore refusé les découpages, mais la collecte a été plus fructueuse : il y avait des hexagones « paveurs » et des hexagones « non paveurs » et parmi les « paveurs », il y en avait « avec creux » et il y en avait faisant intervenir des symétries centrales et pas seulement des translations.

Le non-respect de la consigne « découpage » a fait proposer des hexagones trop « semblables ». Les propositions de la deuxième recherche sont plus utilisables. Je vais leur en redemander en devoir maison pour tenter de faire une autre feuille recueil. Avec ces feuilles recueils, nous aborderons seulement ensuite les phrases caractérisant les hexagones paveurs.

Ci-dessous est dessinée une partie des découvertes utilisant le réseau quadrillé, d'autres avaient été trouvées à partir de réseaux triangulés :



L'ensemble des découvertes de pavages à été mis en commun et redistribué à tous les groupes. Ceux-ci devaient ensuite produire des phrases construites sur le modèle « Si …. alors…. ».

Voici les réponses obtenues :

1- S'il a deux côtés parallèles, alors c'est un hexagone paveur.
2- S'il a deux côtés égaux, alors c'est un hexagone paveur.
3- Si l'hexagone est paveur, il a ses côtés opposés égaux.
4- Si l'hexagone est paveur, il a ses côtés opposés parallèles.
5- Si l'hexagone est paveur, il a deux côtés parallèles.
6- Si l'hexagone a ses côtés parallèles deux à deux, alors c'est un hexagone paveur.
7- Si l'hexagone a un centre de symétrie, alors c'est un hexagone paveur.
8- Si on a au minimum deux côtés parallèles, alors c'est un hexagone paveur.
9- Si l'hexagone est paveur, alors il a au minimum deux de ses côtés parallèles.
10- Si l'hexagone possède un angle droit, alors il pave le plan.
11- S'il a deux côtés égaux ou deux côtés parallèles et de même longueur, alors c'est un hexagone paveur.
12- S'il a ses côtés parallèles deux à deux et de même longueur, alors c'est un hexagone paveur.
13- Si l'hexagone fait un creux alors il ne pave pas.
14- Si l'hexagone fait une translation, alors il pave le plan.
15- Si les hexagones tournent autour de la première pièce (symétrie centrale) alors ils pavent le plan.
16- S'il n'y a pas de trous entre deux hexagones, alors c'est un hexagone paveur.
17- Si on assemble deux hexagones ils forment un rectangle, un carré ou un losange, alors c'est un hexagone paveur.
18- Même si un hexagone n'a pas d'angle droit alors c'est un hexagone paveur.
19- Si l'hexagone est paveur, ils se ressemblent tous.
20- S'il a un axe de symétrie alors c'est un hexagone paveur.

L'ensmble des phrases a été confié aux élèves. Pour chacune d'entre elles, ils devaient si possible écrire : « je suis sûr que c'est faux parce que… » ou « il est possible que ce soit faux » ou « je suis sûr que c'est juste parce que… » ou « il est possible que ce soit juste »

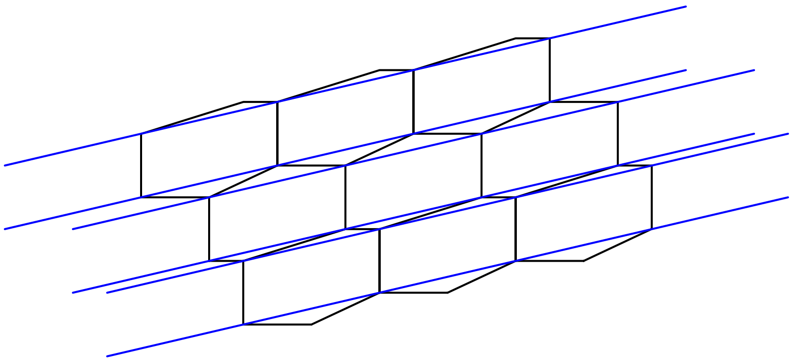
Ci dessous un tableau résume les types de proposition des élèves :

	Ex 4^{E} (familiers des spirolatères)	Autres élèves
C'est vrai car référence à un ou des exemples	7	6
Confusion propriété directe et réciproque	2	1
Usage correct de contre-exemple pour conclure	9	5
Usage d'un contre-exemple faux	2	
Référence aux dessins collectés, mais non explicitation d'un contre-exemple	1	2
Référence à ce qui a été fait sur les quadrilatères sans que cela ne fournisse une preuve	3	1
Référence à ce qui a été fait sur les quadrilatères et cela fournit une preuve	1	1
Référence à une propriété de la liste considérée comme vraie et cela fournit une preuve	1	
Référence à une propriété non ou mal justifiée (vraie ou fausse)	7	9
Il est possible que ce soit juste car je n'ai pas encore de contre-exemple	2	1
Phrase affirmée comme non	3	

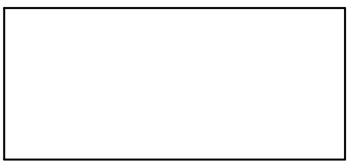
comprise		
Phrase affirmée comme ayant plusieurs sens et bien analysée	1	
Affirmation sans essai de preuve	3	4

Finalement peu de différences si ce n'est peut être un meilleur usage du contre-exemple pour ceux qui avaient rencontré les spirolatères…
A la question « comment reconnaître un hexagone paveur », la réponse finalement acceptée a été : « s'il a deux côtés parallèles et de même longueur, alors c'est un hexagone paveur ».
Les élèves étaient persuadés de la justesse de leur proposition mais ne savaient pas la prouver.

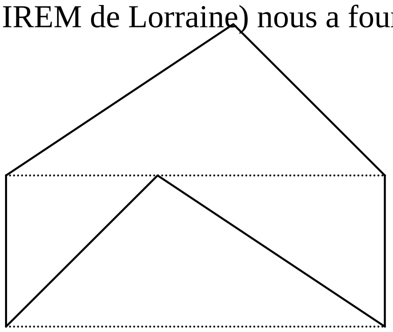
Une preuve imaginée par Pol Le Gall leur a été présentée dans le cas d'un hexagone convexe : les deux cotés parallèles et de même longueur permettent la création de bandes formées de parallélogrammes, les autres côtés permettent la création de bandes formées de triangles.



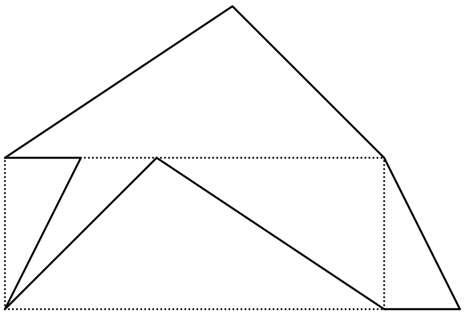
La question suivante a ensuite été posée : « existe-il des hexagones paveurs n'ayant pas deux cotés égaux et parallèles ? ».
Nicole Bardy-Panse (Université de Nancy 1 et IREM de Lorraine) nous a fourni une réponse :



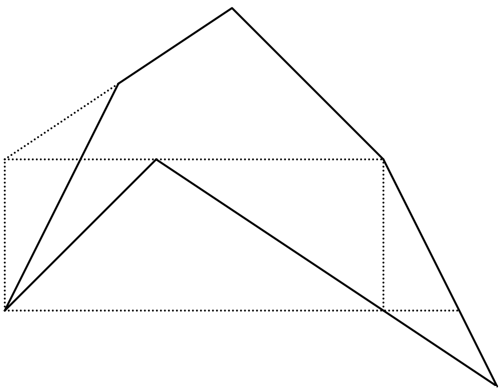
Un rectangle paveur



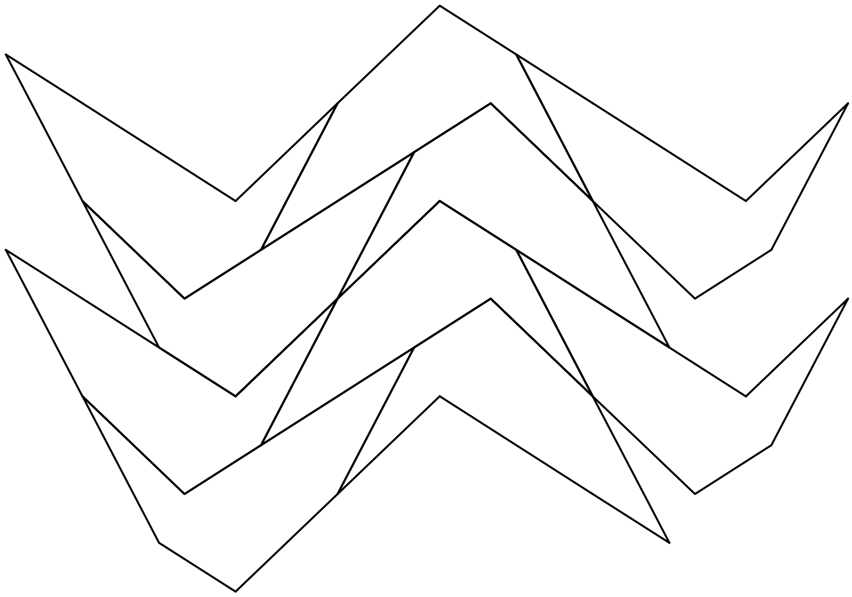
Un hexagone paveur à deux côtés parallèles et de même longueur



Un octogone paveur sans côtés parallèles et de même longueur.



Un hexagone paveur sans cotés parallèles et de même longueur

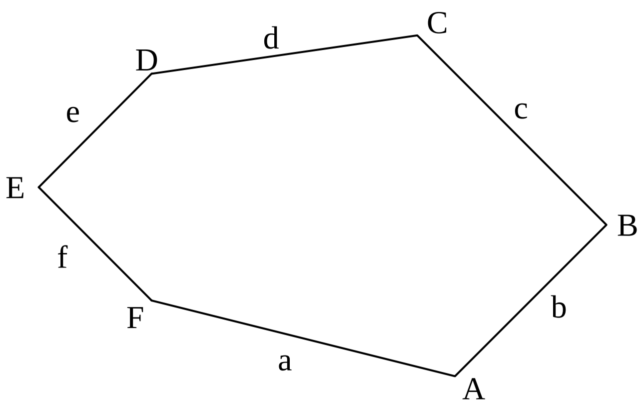


Pour l’hexagone, le fait d’avoir deux côtés égaux et parallèles fait de lui un hexagone paveur. Au vu du pavage dessiné ci-dessus, cette condition n’est pas nécessaire.

Existe-il une propriété des cotés possédée par tous les hexagones paveurs ? Les élèves et leur enseignant n’avaient pas la réponse…

La défunte revue « Pentaminos » de l’IREM de Grenoble ainsi que les auteurs de la brochure « Les MALICES du KANGOUROU – ACL. Les éditions du Kangourou 2005 » se sont arrêtés aux hexagones dont les côtés sont parallèles 2 à 2. Les élèves sont allés plus loin et l’aide d’une collègue universitaire de l’IREM de Lorraine a relancé le problème.

Une recherche sur Internet à permis à l’enseignant de découvrir « Les 3 types d’hexagones qui pavent le plan » à l’adresse http://www.jlsigrist.com/hexapave.htlm . Le problème semble donc actuellement résolu, mais aucune démonstration n’est présente dans ce site.



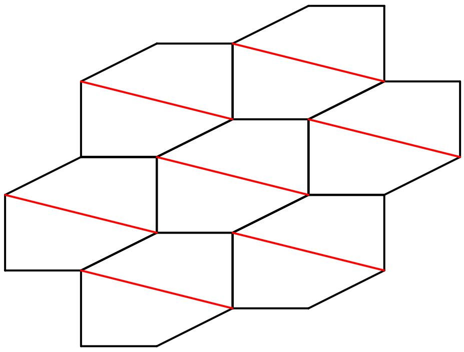
Type n°1
A + B + C = 360° et a = d

Type n°2
A + B + D = 360° et a = d et c = e

Type n°3
A = C = E et a = b et c = d et e = f

<u>Quelques remarques</u>

Les élèves ont été très intéressés par cette recherche pour laquelle avait été clairement annoncé que l'enseignant ne savait pas à l'avance jusqu'où il était possible d'aller.
Du temps aurait pu être pris pour la validation de certaines propositions d'élèves. En particulier à la n°7 « Si l'hexagone a un centre de symétrie, alors c'est un hexagone paveur. ».
Le tracé d'une diagonale permettait de « replonger » dans le cas du pavage du plan par des quadrilatères :



Bénéficier exceptionnellement d'une heure supplémentaire hebdomadaire a facilité les choses.
Les résultats obtenus par les élèves montrent une fois de plus qu'il est bien utile de pouvoir leur laisser un peu de temps...

La géométrie enseignée en classe de troisième reste très calculatoire. Il semble peu facile d'y réutiliser cette démarche. Une piste semble ou doit pouvoir s'ouvrir lors de l'étude des sections de solides et de parrallélépipèdes en particulier. Cette interrogation à ce propos est quelque chose de nouveau pour eux. Il pourra être intéressant d'étudier les validations qu'ils proposeront.
En explorant des contenus plus calculatoires, la recherche du PGCD est sans doute un temps favorable à une recherche "ouverte".

UN PROBLEME D′ARITHMETIQUE EN TROISIEME– LES LAMPES

Pierre Alain Muller

Le problème

Enoncé

On dispose de 100 lampes numérotées de 1 à 100, dotées d'interrupteurs. Au début de l'expérience, elles sont toutes éteintes.
A la première étape, on agit sur tous les interrupteurs allumant ainsi toutes les lampes.
A la deuxième étape on n'agit que sur les interrupteurs dont le numéro est un multiple de 2, éteignant ainsi une partie des lampes.
A la troisième étape on n'agit que sur les interrupteurs dont le numéro est un multiple de 3, etc.…
Après la $100^{\text{ème}}$ étape, quelles seront les lampes allumées ?

Solution résumée

Les lampes qui seront allumées sont celles pour lesquelles l′interrupteur aura été actionné un nombre impair de fois.
Il faut donc trouver les nombres qui ont un nombre impair de diviseurs.
Si a est un diviseur de N, N/a l′est aussi. Donc les "diviseurs vont par deux", sauf s′il existe un diviseur a tel que a=N/a, donc tel que a^2=N.
Autrement dit les lampes qui restent allumées sont celles qui correspondent à des carrés parfaits.

Compte-rendu

Progression

Le chapitre d'arithmétique est le premier chapitre traité dans l'année. Il a quasiment été traité dans son ensemble lorsque cet exercice a été donné en devoir maison.

Objectifs

- Travail sur la notion de diviseurs
- Diversité des méthodes de résolutions (essais, schémas, tableurs, aide…)
- Débat en classe
- Démonstration arithmétique.

Contexte

Une classe de 29 élèves, composée pour moitié d'élèves en section européenne allemand, et pour moitié d'élèves plus en difficulté, dont un en recherche d'insertion.

Consignes pour les élèves

L′énoncé est posé comme il est indiqué plus haut.

Déroulement

Pendant la semaine où les élèves doivent faire le devoir, cet exercice surprend, intrigue et suscite de nombreuses questions auxquelles je ne réponds pas, me contentant d'expliquer l'énoncé pour éviter au maximum les erreurs de compréhension. Mais, visiblement, il se passe quelque chose autour de cet exercice qui alimente les conversations de début de cours. Je rassure les élèves en leur disant que cet exercice ne sera pas noté dans le devoir, ce qui ne diminue pas leur intérêt.

Lors de la correction, je demande aux élèves d'exposer de quelle façon ils ont abouti à leur conclusion, ce qui leur permet de voir la panoplie des stratégies développées par la classe. Les conclusions (seules les lampes portant un numéro qui est un carré sont allumées) sont les mêmes pour tous. Ce consensus et la diversité des méthodes employées sont pour eux des preuves de la justesse de la solution. Certains bons élèves que j'avais en 4ème et qui ont pratiqué les spirolatères me demandent si on a démontré le résultat, ce qui permet de relancer le débat sur la différence entre démonstration et multiplicité d'exemples.
Même si les élèves n'ont aucun doute sur la véracité de leur solution certains souhaitent en avoir la démonstration. S'engage alors une réflexion (que j'ai guidée) sur le nombre de diviseurs d'un nombre et sur la parité de ce nombre de diviseurs, pour aboutir à la démonstration.

Commentaires

- Le fait de préparer le débat à la maison permet à plus d'élèves de se sentir concernés car ils ont quelque chose à dire.
- La nouveauté de l'arithmétique n'exclut aucun élève d'emblée (l'élève en recherche d'insertion a été un des moteur du débat et souvent à bon escient).
- Petit plus que je n'avais pas perçu à priori : les élèves découvrent une première fois la suite des carrés qu'ils utiliseront plus tard dans le chapitre racines carrées.

Autre approche possible

Il est bien sûr possible de donner cet exercice en travail de groupe dès le début du chapitre pour une découverte des diviseurs. C'est notamment le cas lorsque dans la progression on ne choisit pas de mettre le chapitre d'arithmétique en premier et que les élèves ont déjà l'habitude du travail de groupe et des débats.

QUESTIONNEMENTS A PROPOS DE NOMBRES ENTIERS

François DROUIN

Remarques préliminaires

Les exemples ci-dessous montrent des pistes d'argumentation dans le domaine numérique.

Les plus intéressants comme situations de recherche sont ceux qu'on proposera en premier lieu à nos élèves. Pour les situations suivantes, la recherche sera moins ouverte car l'algébrisation apparaîtra vite comme « la méthode » à utiliser prioritairement.
Il semble intéressant de proposer certaines de ces situations dès la classe de sixième. Des éléments de preuves pourront être apportés par l'analyse des derniers chiffres des nombres par exemple. Un élève de sixième peut ainsi montrer que le produit d'un nombre pair est un nombre pair.

Enfin, il n'est pas souhaitable de faire répondre à de nombreuses questions à la suite, mais plutôt de les « distiller » petit à petit en cours d'année.

Un nombre pair est un entier dont le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8. Un nombre impair est un entier dont le chiffre des unités est 1, 3, 5, 7 ou 9.

Voici un certain nombre de questions auxquelles il faudra apporter des réponses justifiées.

Un nombre pair est-il un multiple de 2 ? de 3 ? de 4 ? de 5 ? de 9 ? de 10 ?
Tout multiple de 2,de 3, de 4 , de 5 , de 9, de 10 est il un nombre pair ?

Tout nombre impair est-il égal à « un nombre pair + 1 » ?
Un nombre impair est-il un multiple de 2 ? de 3 ? de 4 ? de 5 ? de 9 ? de 10 ?
Tout multiple de 2 ,de 3, de 4 , de 5 , de 9, de 10 est il un nombre impair ?

Un nombre pair est un multiple de 2 et peut donc s'écrire « 2n ». Un nombre impair est consécutif à un nombre pair et peut donc s'écrire « 2n + 1 ».

Que dire de la somme de deux nombres pairs ?
Que dire de la somme de deux nombres impairs ?
Que dire du produit de deux nombres pairs ?
Que dire du produit de deux nombres impairs ?
Que dire du produit d'un nombre pair et d'un nombre impair ?
Que dire de la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair ?

Que dire du dernier chiffre d'un nombre entier divisible par 2 ?
Que dire du dernier chiffre d'un nombre entier divisible par 5 ?
Que dire du dernier chiffre d'un nombre entier divisible par 10 ?
Que dire des derniers chiffres d'un nombre entier divisible par 4 ?
Que dire des derniers chiffres d'un nombre entier divisible par 25 ?
Que dire des derniers chiffres d'un nombre entier divisible par 8 ?

Comment reconnaître qu'un nombre entier est divisible par 3 ?
Comment reconnaître qu'un nombre entier est divisible par 9 ?

Que dire de la somme de trois nombres entiers consécutifs ?
Que dire de la somme de cinq nombres entiers consécutif s?
Que dire de la somme de deux nombres impairs consécutifs ?

Soient six nombres entiers choisis au hasard, obtenus de la façon suivante :
le 1^{er} et le $2^{ème}$ sont choisis au hasard ; le 3^{e} est la somme du 1^{er} et du $2^{ème}$; le $4^{ème}$ est la somme du $2^{ème}$ et du $3^{ème}$; le $5^{ème}$ est la somme du $3^{ème}$ et du $4^{ème}$; le $6^{ème}$ est la somme du $4^{ème}$ et du $5^{ème}$.
Pouvez-vous exprimer la somme de ces six nombres en fonction du cinquième nombre ?

Que dire du carré d'un nombre pair ?
Que dire du reste lorsqu'on divise le carré d'un nombre impair par 8 ?

Soient trois nombres entiers consécutifs.
Le carré du deuxième, diminué de 1 est égal au produit des deux autres. Est-ce toujours vrai ?
Pour élever au carré un nombre qui se termine par 5, on multiplie le nombre de ses dizaines par le nombre de ses dizaines augmenté de 1 ; le produit obtenu donne le nombre des centaines du résultat cherché ; il suffit alors d'ajouter 25. Est-ce toujours vrai ?

Est-il vrai qu'un carré parfait possède un nombre impair de diviseurs ?

Le résultat indiqué sur la carte postale ci-contre est-il surprenant ?

J'ai lu dans un devoir de classe de seconde :
La somme de 1 et du produit de quatre entiers consécutifs est un carré parfait. Est-ce toujours vrai ?

DES RECTANGLES EN SIXIEME

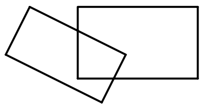
François Drouin

Remarque : les activités « cinq rectangles et cinq carrés » utilisées sont celles des pages 26 et 27 de la brochure « MATHEMATIQUES VISUELLES Osons des coloriages » (IREM de Lorraine 2004).

Première heure

Rectangles entrecroisés : première activité « cinq rectangles et cinq carrés »

Pour les premiers dessins, les rectangles se croisent, sans se soucier des directions respectives de leurs côtés.



Un premier rectangle est demandé, de dimensions 15cm et 12cm.
Je circule dans les rangs pour observer les stratégies de tracé. Une petite moitié des élèves tracent le rectangle en n'utilisant que la régle graduée. Certains dessins sont a priori bien satisfaisants. L'autre partie de la classe utilise compas, équerre…
En passant parmi les élèves, je pose la question : « comment peux tu me persuader que ce que tu as tracé est un rectangle ? ». Je résume les remarques des élèves : « il y des angles droits, deux grandes longueurs égales et deux autres aussi égales ».

Première synthése avec les élèves : « comment être sûr qu'un rectangle a été tracé ?» Un accord est vite arrivé sur le fait qu'il fallait 4 angles droits. Les égalités de longueur ont été abandonnées. Pour moi, cela ne signifie pas que les élèves pensaient que les angles droits suffisaient, mais plutôt que le « risque » de carré n'était plus présent dans leur tête…

Je n'ai pas réactivé les choses et les élèves n'ont controlé que les 4 angles droits. Dans le cours élaboré avec les élèves, cela a donné :

Un rectangle a 4 angles droits, deux longueurs égales et deux largeurs égales. Pour être sûr que ce que j'ai tracé est un rectangle, je vérifie qu'il a 4 angles droits.

Les mots « longueur » et « largeur » n'ont pas été immédiats à remettre en place, le mot quadrilatère n'a pas été proposé.
Nous reprendrons cela plus tard lors de rencontres de polygones qui ne seront pas des quadrilatères.
Les enchevêtrements de rectangles sont poursuivis, vérifiés par les élèves. Les coloriages sont faits à la maison.

Deuxième heure

Les élèves ont tous auparavant tracé des rectangles.
Il leur est demandé d'écrire sur leur cahier des phrases expliquant comment ils font pour tracer un rectangle.
Les élèves peinent pour écrire quelque chose. Au bout de une à quinze minutes des feuilles circulent dans la classe pour récolter les propositions des élèves (plusieurs méthodes

pouvaient être proposées). Au bout du temps imparti, moins de la moitié des élèves proposent quelque chose.

Voici ce qui a été conservé, l'orthographe n'a pas été modifiée.

1- J'ai tracer un rectangle, de 4cm sur 2cm. J'ai tracer ensuite une droite à la raigle puis tracer une petite droite pour faire un angle droit. Puis, j'ai recommener une une fois, pour faire un rectangle.
2- J'ai tracer un rectangle de 15×5cm. D'abord avec la règle puis j'ai vérifier à l'équerre si y avait des angles droit et ça a marché.
3- J'ai tracer un rectangle de 7cm sur 1cm pour tracer j'ai prie un régle et une equere. J'ai mit l'equere quontre la règle j'ai traccer le rectagle et j'ai regarder sit cet'ait droit
4- Tracer la droit A,B, puis la A,D il faut qu'il est un angle droit puis la B,C assi il faut qu'il est un angle droit puis la D,C.
5- 1. On trace un trait droit à la régle de 15cm.
   2. On place le trait du millieu de l'équerre magique sur le trait qu'on vient de tracer et l'on trace un trait de 3cm.
   3. On recommence de l'autre côté du trait.
   4. On fait rejoindre les seux traits qui dépassent en vérifiant q'ils forment un angle droit.
6- J'ai pris ma régle, j'ai fait le 1^er^ segment. Avec l'equerre, j'ai tracée les 2 segment. Puis avec le compas j'ai terminer la figure.
7- J'ai pris ma régle, j'ai fait le 1^er^ segment et avecl'equerre j'ai fait le 2^ème^ segment. De la même façon, j'ai terminer la figure.
8- J'ai commencé par tracé un segement qui se nomme a,b
   au point c, j'ai tracé un segement de 3cm, qui se nomme C,B
   au point B j'ai tracé un segemement de cm qui s'appelle B,A puis j'ai tracé au point A un ségment de 3cm qui s'appel A,D.
9- on prend 2 triangle
10- J'ai tracé la première longueur et la première largeur avec l'équerre et les deux autres avec le compas et l'équerre.
11- J'ai utilisé l'équerre pour toute la figure.
12- on prends la régle et les equerre et ont trace une lignes droites on doit tracer 2 longeur et 2 largeur
13- J'ai utiliser l'equerre pour tracer le premier trer e j'ai regarder si s'était des angles droits
14- j'ai tracer déjà une longueur de 4cm et une largeur de 2cm et j'ai vérifié mes angles drois
15- J'ai tracais un segment puis j'ai utilisaisl'équerre pour faire l'angle droit. Je trace l'autre largeur qui doit être paeallèle à l'autre largeur puis je m'assure qu'il ya bien l'angle droit
   Je rejoins les deux largeur d'un segment qui s'appelle la longueur
   Je vérifie qu'il ya bien quatre angle droit.

Troisième heure

Par groupes de 2 ou 3 élèves, les élèves devaient d'abord corriger les fautes d'orthographe qu'ils repéraient puis produire des phrases comme « je refuse la méthode n°… car… » ou « j'accepte la méthode n°… car…. » . Les écrits des élèves ont été ramassés en fin d'heure.

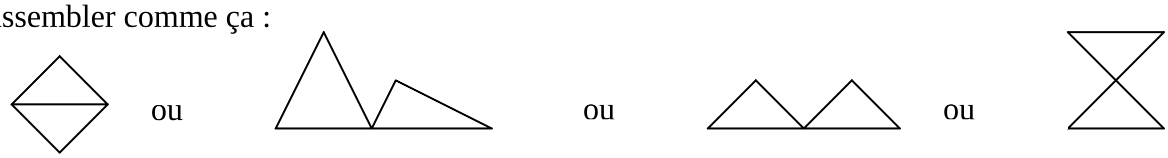
Dans le tableau ci-dessous, le décompte de ce qui a été accepté et refusé :

n° des propositions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nombre des refusées	2	4		3			1		8		4	1	2	1	2
Nombre des acceptées	4	2	7		5	4		2	1						1

Peu de groupes ont réellement eu le temps d'étudier les 15 propositions.

<u>Les refus (orthographe rectifiée)</u>

Je refuse la méthode n°9 parce que ça ne veut rien dire. On prend 2 triangles et ça ne fait pas un rectangle.
Je refuse la méthode n°11 parce que ça n'explique pas comment il ou elle l'a fait ;
Je refuse la méthode n°2 parce que c'est impossible de faire ce rectangle.
On n'accepte pas la méthode 9 parce qu'on ne nous donne pas assez d'informations.
On n'accepte pas la méthode 1 parce qu'on ne sait pas quelle est sa figure.
Je refuse la méthode n°9 parce que la réponse est incomplète, il n'y a pas les mesures.
Je refuse la méthode n°11 parce que la réponse est incompléte, il n'y a que le matériel.
Je refuse la méthode n°7 parce qu'il n'y a pas les mesures et qu'elle ne vérifie pas les angles droits.
Je refuse la méthode n°15 parce qu'il n'y a pas les mesures.
Je refuse la méthode n°13 parce qu'il n'y a pas les mesures et aussi qu'il (qu'elle) n'a tracé qu'un trait.
Je refuse la méthode n°11 parce qu'il dit juste l'instrument qu'il a utilisé.
Je refuse la méthode n°2 parce que ça ne marche pas tout le temps.
Je refuse la méthode n°9 parce quil n'a pas dit la dimention du triangle.
Je refuse la méthode 1 car une droite ne se termine jamais.
Je refuse la méthode n°9 car on ne sait jamais comment assembler les triangles. On peut les assembler comme ça :



Je refuse la méthode n°9 parce que
Je refuse les méthodes 1,2 et 4.
Je refuse le n°1 car il n'a pas fait un rectangle, il a fait un carré.
Je refuse la n°9 car ce ne sont pas des triangles.
Je refuse la méthode n°1 parce qu'à la place de droite, il faudrait mettre un segment et il faut se servir de l'équerre.
Je refuse la méthode 9 car ce n'est pas expliqué la forme des triangles.
Je refuse les méthodes 11 et 15 parce que c'est mal expliqué.
Je refuse la méthode n° 9 parce qu'il n'y a pas d'explications.
Je refuse la méthode n°4 parce que il ou elle ne parle que des angles droits.
Je refuse la méthode n°5 parce qu'elle nest pas bien expliquée.
Je refuse la méthode 11 car il ou elle ne parle que des outils.

<u>Les méthodes acceptées (orthographe rectifiée) :</u>

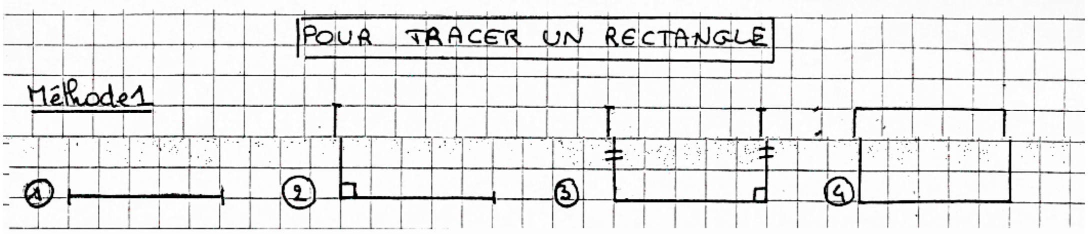
J'accepte la méthode n°3 parce que c'est bien expliqué.
J'accepte la méthode n°15 parce que c'est très bien expliqué et bien écrit.
On accepte la n°2 parce qu'on pense que ses phrases sont bien pour tracer un rectangle.
On accepte la méthode n°1 mais on la modifie car il y a des mots qui n'ont rien à y faire.
J'accepte le n°5 car il y a tout pour faire un rectangle.
J'accepte le n°3 parce que c'est bien expliqué et il y a tout pour le faire.
J'accepte la méthode 1 parce que je l'ai faite.
J'accepte la méthode 3.
J'accepte la méthode 8 car la figure se réalise, j'ai vérifié.

On accepte la méthode n°1 parce que c'est expliqué et c'est comme cela qu'on fait la méthode.
On accepte la méthode 3 par ce que
J'accepte les méthodes 3 et 5.
J'accepte la méthode 2.
J'accepte la méthode 3 mais il faudrait le noter sur chaque côté.
Je refuse la méthode 4 car ce n'est pas des droites mais des segments.
J'accepte la méthode 5.
J'accepte la méthode 6.
J'accepte la méthode n° 9 parce que c'est une bonne manière.
J'accepte la méthode n° 6 parce qu'il s'est servi du compas.
J'accepte la méthode n°8 parce qu'il s'est servi de l'équerre.
J'accepte la méthode n°1 parce qu'ell est bien expliquée.
J'accepte la méthode n°3 car elle est claire.

Troisième heure

Les 15 propositions sont reprises oralement en classe entière, en revoyant ce qui est incorrect et surtout en repérant ce qui malgré tout est satisfaisant (pour faire émerger les méthodes mises en œuvre par les élèves).

Des incorrections non repérées par écrit l'ont été lors du travail fait oralement : un élève a fait remarquer que la méthode n°12 faisait tracer 5 segments.
Les élèves ont remarqué que dans certaines méthodes comme la n°2, les élèves disaient tracer un rectangle sans expliquer comment ils l'avaient tracé, puis vérifiaient l'existence de quatre angles droits. Si les angles ne sont pas droits, il faut donc recommencer…
Le rôle du contre exemple a été mis en évidence lors de l'examen de la méthode n°9.
Finalement, trois méthodes de tracé ont été découvertes à l'aide des écrits et des remarques des élèves.
Ces méthodes ont été notées dans le cahier de cours sous la forme des bandes dessinées ci-dessous. Des élèments de codage des figures géométriques ont été expliqués et utilisés.



Ces dessins ont été repris pour leur faire correspondre des phrases en français. Il a été précisé que les mots « longueur », largeur » et « perpendiculaire » pouvaient être utilisés. Les phrases ont été élaborées collectivement par oral et notées par écrit par un « secrétaire de scéance ».

Méthode 1

Je trace une longueur.
Je trace une largeur perpendiculaire à la longueur.
Je trace une autre largeur perpendiculaire à la longueur.
Je trace la $2^{\text{ème}}$ longueur.

Méthode 2

Je trace une longueur.
Je trace une largeur perpendiculaire à la longueur.
Au bout de la largeur, je trace un arc de cercle de rayon la longueur.
Au bout de la longueur, je trace un arc de cercle de rayon la largeur.
Tracer la longueur et la largeur manquantes.

Méthode 3

Je trace la longueur.
Je trace une largeur perpendiculaire à la largeur.
Au bout de la largeur, je trace une droite perpendiculaire à la largeur.
Au bout de la longueur, je trace une droite perpendiculaire à la longueur.

Ces dessins ont été repris lors de l'étude du parallélisme des droites : voici les « définitions » élaborées par échanges oraux dans la classe (l'enseignant faisait si nécessaire des dessins à main levée au tableau avant de noter les phrases qui seront notées dans le cahier de cours des élèves).
« Deux droites parallèles sont des droites qui ne se coupent pas (qui ne sont pas sécantes) ».
« Deux droites parallèles sont deux droites qui ont la même inclinaison (la même direction) ».
« Deux droites parallèles sont deux droites qui sont perpendiculaires à une même droite ».

« Deux droites parallèles sont deux droites qui peuvent être considérées comme les supports des longueurs et des largeurs d'un rectangle ».

Cas particuliers

« Deux droites parallèles sont deux droites qui ont même écartement » met en œuvre la méthode n°1 de tracé de rectangle. Elle permet un tracé précis en utilisant l'équerre rapporteur et son axe de symétrie « glissant » sur la droite de départ.
« Deux droites parallèles sont deux droites qui sont perpendiculaires à une même droite » met en œuvre la méthode n°3 de tracé de rectangle. Elle est celle couramment mise en œuvre au cycle III.

Quelques remarques

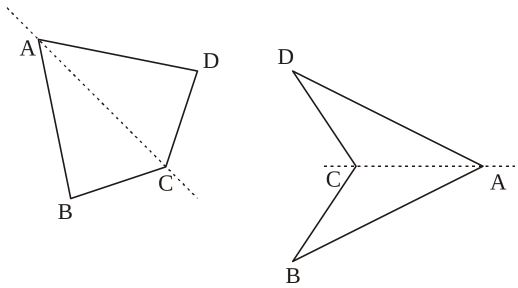
Le tracé de rectangles puis la recherche de méthodes mises en œuvre lors de ces tracés a permis de différer le temps de validation (je fais et ensuite je cherche si cela convient, ce mode de fonctionnement est fréquent dans l'analyse de comportements d'élèves) et le temps de « certitude » justifiant le tracé (il est à noter que seule la méthode n°3 pourra être justifiée avec les propriétés mathématiques au programme de la classe de sixième : nous pourrons expliquer pourquoi le fait d'avoir trois angles droits nous assure que le quatrième l'est également.)
Le passage à l'écrit des méthodes de tracé des rectangles ne s'est pas fait tout seul. J'ai choisi de leur faire corriger le maximum de fautes d'orthographe sur l'ensemble des phrases anonymées pour que la phase « j'accepte – je refuse » ne soit pas trop perturbée par les fautes de français.
Les échanges à l′oral et les figures géométriques ont facilité l'émergence et l'acception par les élèves des trois méthodes finalement notées sur le cahier de cours. Volontairement, en ce

début d'année, je n'ai pas fait le forcing à propos de phrases de cours n'utilisant que la « langue mathématique ».

SIXIEME : L’AIRE DU CERF-VOLANT ANT

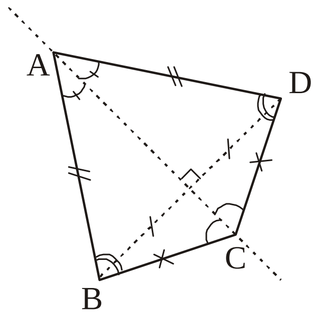
LE CERF-VOLANT

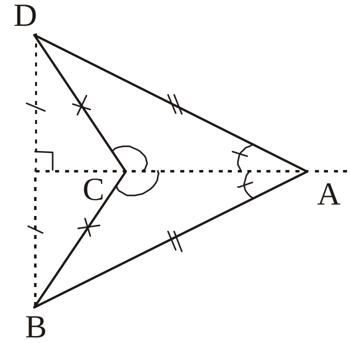
Définition



Le cerf-volant est un quadrilatère dont une diagonale est un axe de symétrie.

Conséquences





1) La symétrie par rapport à la droite (AC) conserve les longueurs
   Donc AD = AB et BC = CD

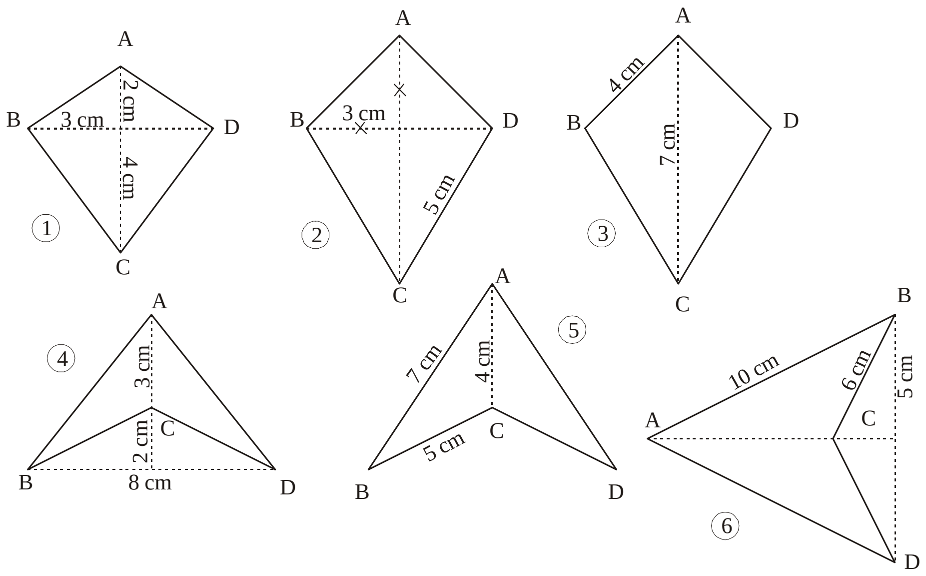
2) La symétrie par rapport à la droite (AC) conserve les angles
   Donc $\widehat{DAC} = \widehat{BAC}$; $\widehat{DCA} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{ACD}$

3) La symétrie par rapport à la droite (AC) conserve les aires
   Donc les triangles DCA et BCA ont même aire

4) Le point B est le symétrique du point D
   par rapport à la droite (AC).
   Je suis donc sûr
   que les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
   Je suis aussi sûr
   que la diagonale (AC) coupe le segment [BD] en son milieu.

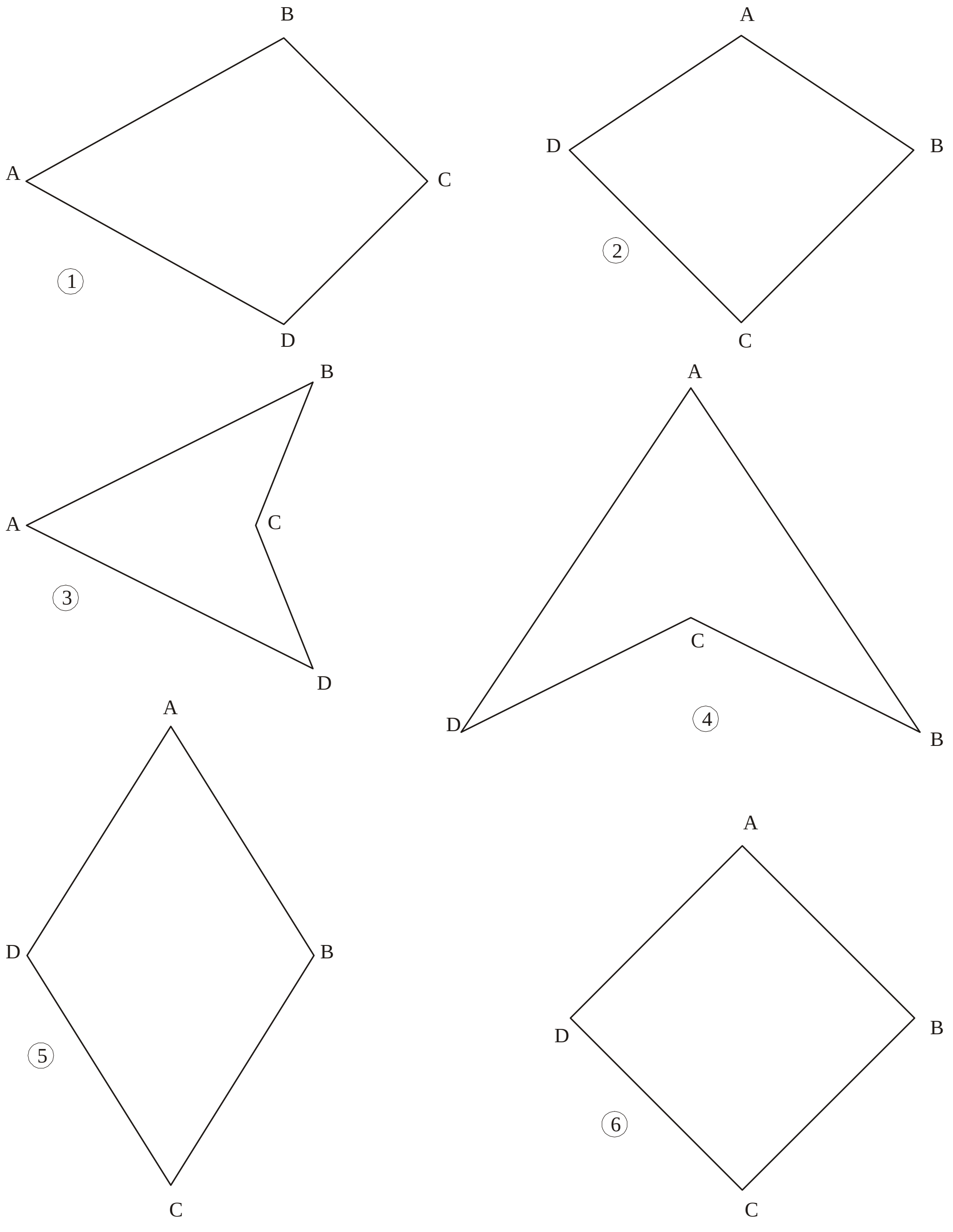
Exercice

En utilisant ce que tu sais à propos des cerfs-volants et en utilisant ce qui est noté sur les figures, dessine en vraie grandeur les six cerfs-volants ci-dessous.

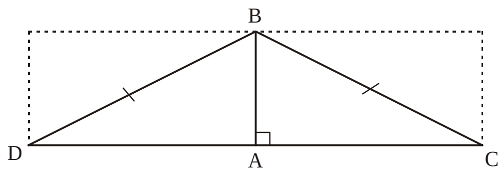


AIRE D’UN CERF-VOLANT

En traçant ce qui te semble utile et en mesurant ce qui te paraît nécessaire, calcule l’aire des 6 cerfs-volants ci-dessous.

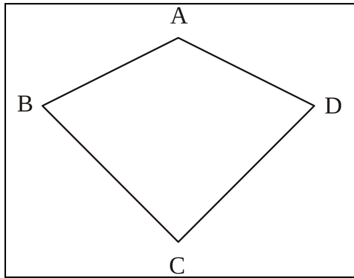
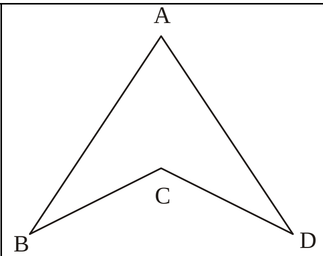
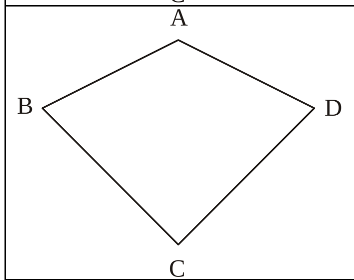
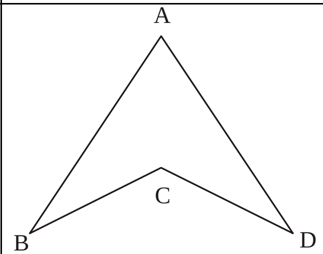
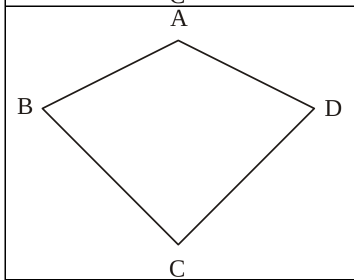
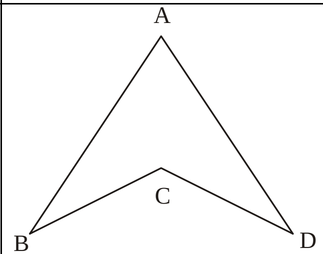
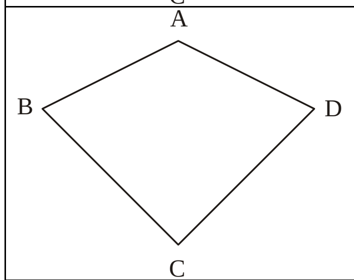
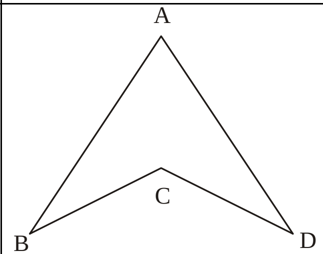


RAPPELS

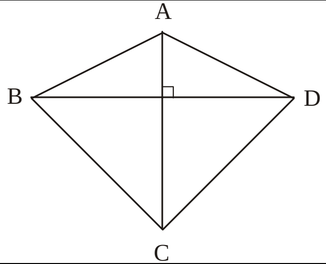
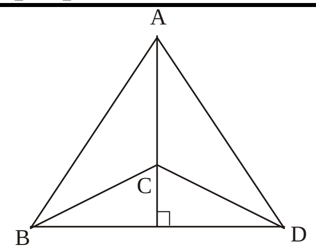
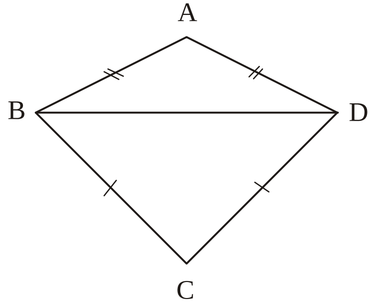
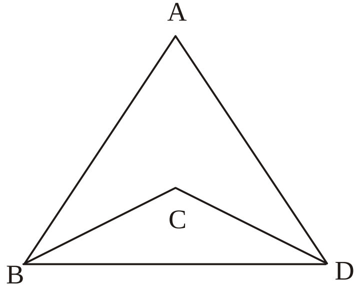
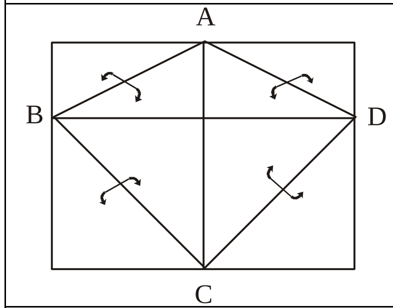
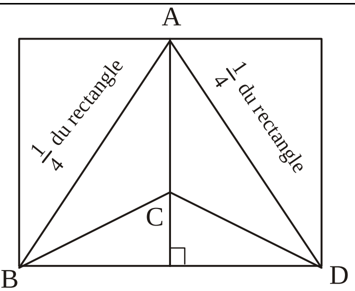
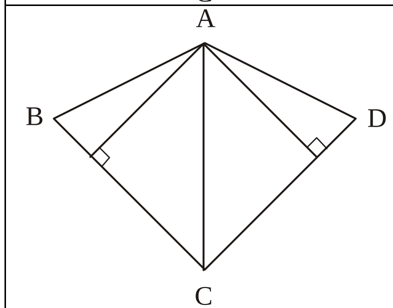
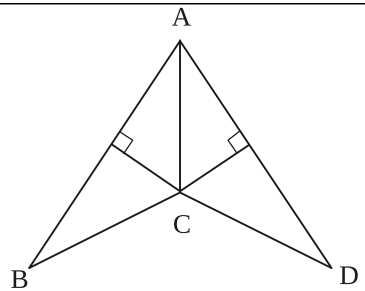


1. L’aire d’un triangle rectangle est la moitié de l’aire d’un rectangle.
2. L’aire d’un triangle isocèle est la moitié de l’aire d’un rectangle.

Trouver le plus possible de méthodes permettant de calculer l’aire d’un cerf-volant convexe (colonne de gauche).
Existe-il une formule permettant de calculer l’aire de ce type de cerf-volant?
Les méthodes utilisées dans la colonne de gauche restent-elles valables pour un cerf-volant concave (colonne de droite) ?
Si non, que faut-il modifier ?

 Méthode 1 : Calculs :	 Méthode 1 : Calculs :
 Méthode 2 : Calculs :	 Méthode 2 : Calculs :
 Méthode 3 : Calculs :	 Méthode 3 : Calculs :
 Méthode 4 : Calculs :	 Méthode 4 : Calculs :
Existe-t-il une formule permettant de calculer l’aire de ce type de cerf-volant ?	Existe-t-il une formule permettant de calculer l’aire de ce type de cerf-volant ?

AIRE D'UN CERF-VOLANT (propositions d'élèves)

 Méthode 1 : je trace les diagonales et j'additionne les aires des 4 triangles rectangles.	 Méthode 1 : je trace les diagonales et je soustrais les aires des petits triangles rectangles aux aires des grands triangles.
 Méthode 2 : Je trace la diagonale qui n'est pas l'axe de symétrie et j'additionne les aires des 2 triangles isocèles.	 Méthode 2 : Je trace la diagonale qui n'est pas l'axe de symétrie et je soustrais l'aire du petit triangle isocèle à l'aire du grand triangle isocèle.
 Méthode 3 : J'entoure le cerf volant par un rectangle. L'aire du cerf volant est la moitié du grand rectangle.	 Méthode 3 : L'aire du cerf volant n'est pas égale à la moitié de l'aire du rectangle qui l'entoure.
 Méthode 4 : Je trace l'axe de symétrie. Je calcule l'aire d'un des 2 triangles en le découpant en 2 triangles rectangles. Par symétrie, je connais l'aire du 2ème triangle donc du cerf volant.	 Méthode 4 : : Je trace l'axe de symétrie. Je calcule l'aire d'un des 2 triangles en le découpant en 2 triangles rectangles. Par symétrie, je connais l'aire du 2ème triangle donc du cerf volant.
L'aire du cerf-volant est la moitié de l'aire du rectangle qui l'entoure $\mathcal{A} = (D \times d) : 2$	La formule $\mathcal{A} = (D \times d) : 2$ semble être vraie sur cet exemple mais on ne sait pas pourquoi.

Déroulement

En bas de la feuille de calculs d'aires de divers cerfs-volants était rappelé comment calculer l'aire d'un triangle rectangle et d'un triangle isocèle. Ces méthodes ont été utilisées, ainsi que la symétrie orthogonale pour la justification d'aires égales. Le document en « annexe 2 » présente ce qui finalement est devenu la trace écrite pour les élèves. Les élèves ne savaient pas quoi écrire comme « méthode ». La demande des calculs en bas de case avait été faite en prévision de cette difficulté prévue. Finalement, elle n'a pas été utilisée dans la première partie de l'activité.

Pour le cerf-volant convexe, l'entourage par un rectangle a fait apparaître une méthode formulée ainsi par un élève ; « l'aire du cerf volant est la moitié de l'aire d'un rectangle ». Pour préciser de quel rectangle il s'agissait, il a été précisé « l'aire du rectangle qui l'entoure ». Très clairement, les élèves avaient en tête les images mentales présentées pour se remémorer comment calculer l'aire d'un triangle rectangle ou d'un triangle isocèle. Dans ces deux cas, l'aire est aussi la moitié de l'aire du rectangle qui entoure le triangle. La formule « $A = (D \times d) / 2$ » figurant en bas de feuille a été proposée par l'enseignant lorsqu'un élève a évoqué le rôle des diagonales pour calculer l'aire du rectangle

Les élèves ont ensuite tenté d'adapter au cerf-volant concave les méthodes mises en œuvre pour le cerf-volant convexe. Les deux premières méthodes fonctionnent en remplaçant les additions par des soustractions. La quatrième méthode fonctionne sans modification. Quant à la troisième (entourage par un rectangle), elle semble ne plus fonctionner…Un élève a essayé d'utiliser malgré tout la formule et a constaté qu'elle semblait donner le même résultat que celui donné par les méthodes 1 et 2. La comparaison avec le résultat donné à la méthode 4 nous a permis d'aborder les incertitudes dues aux mesures et donc la valeur nécessairement approchée du résultat.
Il a été noté en synthèse que la formule « $A = (D \times d) / 2$ » semblait vraie sur l'exemple, mais que nous ne savions pas pourquoi. Il semble préférable qu'elle ne soit pas utilisée en classe de sixième pour les cerfs-volants concaves (ceux-ci ne seront que peu rencontrés, d'autres méthodes sont à la disposition des élèves et la formule sera démontrée l'année suivante en classe de cinquième…). Il a semblé préférable de clarifier les choses : pour un type de cerf-volant, la formule a été prouvée et est donc utilisable. Pour l'autre type, la formule n'est pas certaine et nous utiliserons d'autres méthodes.

Bilan de cette activité

Le fait de laisser les élèves chercher plusieurs méthodes a permis de ne pas privilégier l'utilisation d'une formule.
Lors d'autres calculs d'aire de cerf-volant, les meilleurs élèves ont eu tendance à privilégier la formule ou l'image mentale du rectangle qui entoure le cerf-volant. Pour beaucoup d'élèves, l'utilisation de quatre triangles rectangles est restée la méthode choisie. Lors des corrections, plusieurs méthodes ont toujours été mises en parallèle, sans échelle de valeur.

Par la suite, nous avons pu de même explorer de nombreuses méthodes pour calculer l'aire d'un carré et constater que la formule classique n'était pas la seule voie possible : le carré est un losange, donc un cerf-volant, et le travail a pu être réutilisé. Les manuels n'évoquent pas « $A = (d \times d)/2$ » comme formule d'aire du carré. Elle est pourtant bien utile pour comprendre qu'un carré n'est pas qu'un rectangle particulier…

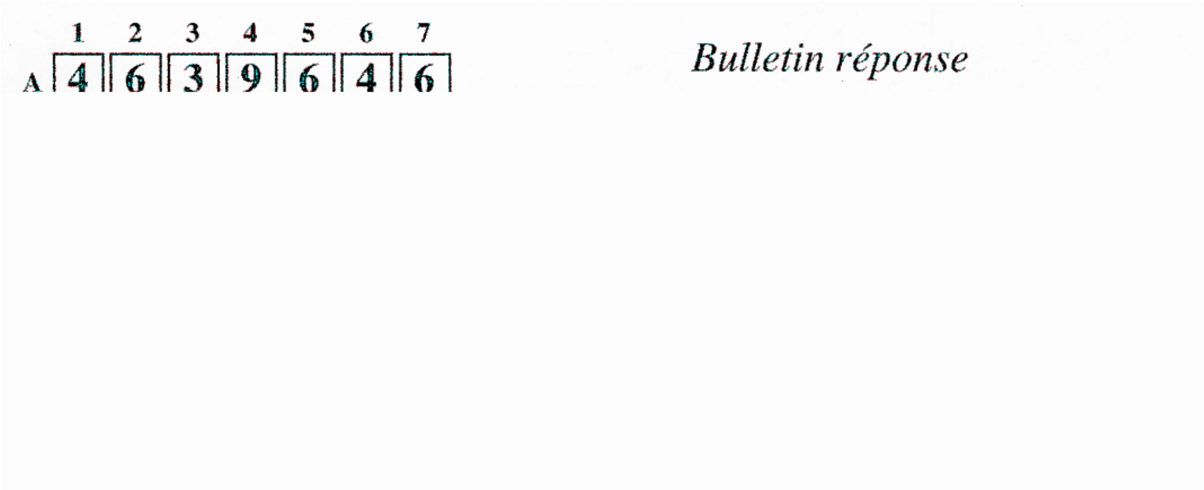
Quelques autres activités de recherche en classe de sixième

Aire et périmètres de rectangles

Combien existe-t-il de rectangles d'aire 60 cm^2 ? Quel est celui qui a le plus grand périmètre ? Le plus petit périmètre ?
Combien existe-t-il de rectangles de périmètre 24 cm ? Quel est celui qui a la plus grande aire ? La plus petite aire ?
Trace un carré d'aire 60 cm^2 .

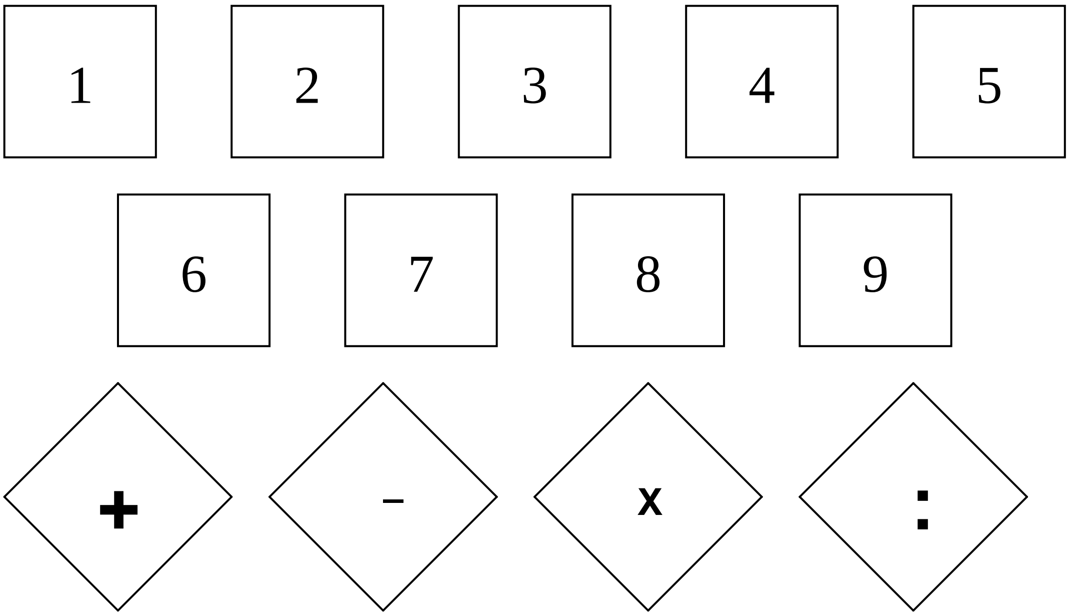
Des calculs du type « …×…±…= 32 »

Utilisation du jeu de TRIO édité par RAVENSBURGER et présenté dans JEUX 5 et JEUX6 (APMEP) : les 49 jetons carrés sont placés en carré 7×7. Il faut placer les nombres de trois cases alignées voisines (horizontales, verticales ou en diagonale) dans une schéma opératoire du type …×…±… pour obtenir un nombre cible choisi à l'avance.
En utilisant les règles du jeu, de combien de façons peut-on obtenir le nombre 32 ?
Comment être sûr de ne pas en avoir oublié ?



Neuf chiffres et quatre opérations [8]

Les pions pour jouer



Exemple et règle du jeu

Tu choisis 3 pions « chiffres ».	4 2 6
Tu choisis un pion « opération ».	42×6
Avec les chiffres tu réalises un nombre à deux chiffres et un nombre à un chiffre. Entre ces deux chiffres, tu insères l'opération.	
Tu continues avec trois nouveaux chiffres et une nouvelle opération.	98 + 7
Tu termines avec les trois derniers chiffres et une troisième opération (une opération est inutilisée).	35 – 1

Tu additionnes les trois résultats obtenus.

$42 \times 6 = 252$

$98 + 7 = 105$

$35 - 1 = 34$

$252 + 105 + 34 = 391$

J'ai obtenu 391. Et toi, quel est ton record (Maximum et minimum) ?

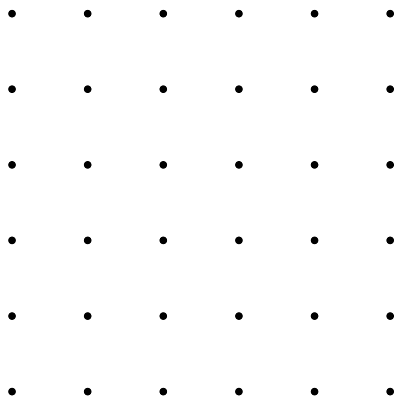
[8] Jeu repéré dans « enseignement secondaire. Section pré-gymnasiale. Options classique et scientifique. MATHEMATIQUES 7ème année. Département de l'Instruction publique du canton de Neufchâtel SUISSE. (A Calame – F. Jacquet) »

Des disques qui roulent

Un disque roule et fait un tour sur lui-même. De « combien de fois le diamètre » a-t-il avancé ?

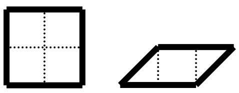
Le jeu de HIP (repéré dans Ludi Maths 2 APMEP Poitiers)

Présentation du jeu



Place le maximum de croix sur les points du réseau de façon que quatre d'entre eux ne soient jamais les quatre sommets d'un rectangle.

Des dessins de cubes accolés



Les carreaux apparaissant en pointillés correspondent à ceux du quadrillage du papier.

En utilisant deux parallélogrammes et un carré semblables à ceux dessinés ci-dessus, combien de dessins d'un cube peux tu réaliser

En utilisant des parallélogrammes et des carrés semblables à ceux dessinés ci-dessus, combien de dessins d'assemblages de deux cubes accolés par une face entière peux tu réaliser ?

En utilisant des parallélogrammes et des carrés semblables à ceux dessinés ci-dessus, combien de dessins d'assemblages de trois et quatre cubes accolés par une face entière peux tu réaliser ?

Comment être sûr de ne pas en avoir oublié ?

QUATRIEME : GRAPHIQUES UTILISANT UN TRIANGLE EQUILATERAL

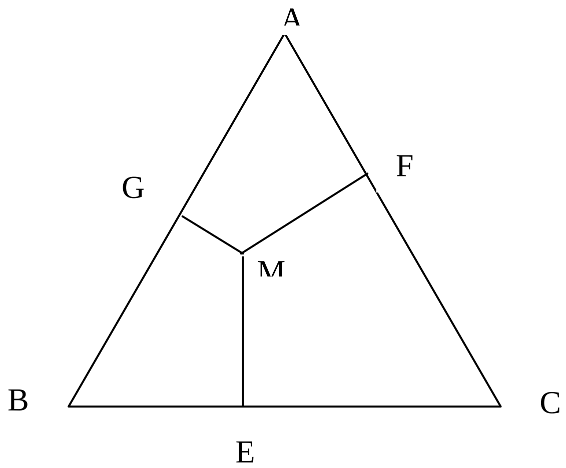
François Drouin

L′ énoncé

ABC est un triangle équilatéral tel que AB = AC = BC = 10 cm.
Où placer le point M pour que la somme des distances de ce point aux côtés du triangle soit minimale (la somme ME + MF + MG doit être la plus petite possible) ?

Compte-rendu

L'activité a été proposée quelque temps après l'étude de la distance d'un point à une droite.



Les élèves ont testé différentes places possibles pour le point M et ont remarqué que la somme ME + MF + MG variait peu des longueurs 8,5 cm, 8,6 cm ou 8,7 cm ...
Ils ont alors conjecturé que la somme ME + MF + MG était constante et que le placement du point M n'avait peut-être pas d'importance.

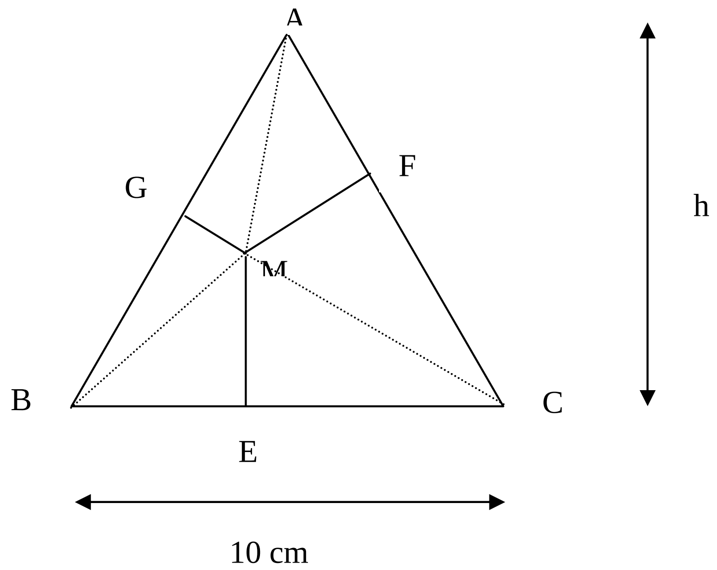
Tout ceci restait à prouver.

Les élèves ne sachant pas comment aborder cette preuve, j'ai proposé le tracé des segments [AM], [BM] et [CM]. Ils ont reconnu les triangles MAB, MAC et MBC ainsi que leur hauteur issue de M (en classe, sur la figure du tableau, les angles droits étaient codés).
Il aurait sans doute été possible de faire redire aux élèves à quel moment la distance d'un point à une droite avait été un outil utile dés la classe de cinquième. Je n'ai pas osé, le temps court si vite...

Cette reconnaissance de trois triangles et d'une de leurs hauteurs n'a pas suffi pour débloquer la situation. J'ai dû leur demander à quoi pouvait servir le tracé d'une hauteur d'un triangle. Après quelques hésitations, l'aire du triangle a cependant été évoquée.

Je leur ai donc demandé d'écrire l'aire de chacun des trois triangles MAB, MAC et MBC. Le fait de ne pas connaître les longueurs ME, MF et MG les a perturbés, cependant nous sommes arrivés à $5 \times$ME, $5 \times$MF et $5 \times$MG pour les aires des trois triangles.
Un rappel de la conjecture proposée par les élèves a fait examiner la somme des trois aires (la somme des distances demandée a incité à étudier la somme des trois aires) et a amené à la conclusion que l'aire du triangle équilatéral ABC pouvait s'écrire $5 \times$(ME + MF + MG). La somme ME + MF + MG était donc égale au cinquième de l'aire du triangle ABC et ne dépendait donc pas du placement du point M dans le triangle.

En exprimant l'aire du triangle ABC en fonction de sa hauteur "h", nous avons pu obtenir de plus que cette aire était aussi égale à $5 \times$h et donc conclure que la somme des distances du point M aux trois côtés du triangle équilatéral ABC était égale à la hauteur "h" de ce triangle. Ce résultat a pu être établi pendant un de mes temps de synthèse.



Mes élèves sont bien rentrés dans la situation de recherche proposée par l'énoncé (ce n'était pas la première qu'ils rencontraient dans l'année), mais ils ont été trés surpris de l'utilisation d'"aire de triangles" et de "calcul algébrique" dans un énoncé qu'ils avaient considéré de prime abord comme un exercice de constructions et de mesurages.

Des collègues auront peut-être envie de poursuivre le questionnement à propos de triangles équilatéraux de côté "c". La classe était une classe de quatrième tout à fait ordinaire et non un regroupement par le jeu d'options de très bons élèves. Je reconnais n'avoir pas eu envie d'aller dans cette direction.
J'ai préféré les orienter vers les cas ou le point M était sur un côté ou un sommet du triangle équilatéral.

Que se passe-t-il lorsque le point M est un point d'un des côtés du triangle ? Que se passe-t-il lorsque le point M est un des sommêts du triangle ?

Lorsque le point M est confondu avec un des sommêts du triangle équilatéral ("A" par exemple), deux des distances sont nulles et le résultat est immédiat.

J'ai profité de cette situation de réussite pour leur demander le calcul d'une valeur approchée à 1 mm près de la hauteur AH du triangle ABC. L'utilisation d'une propriété de la hauteur d'un triangle équilatéral et du théorème de Pythagore leur a fait comprendre que les sommes de longueurs obtenues dans la phase de recherche n'étaient pas farfelues.

Nous allons calculer la hauteur d'un triangle équilatéral de 10 cm de côté et peut-être comprendre pourquoi " ME + MF + MG " varie peu des longueurs mesurées en début d'activité.

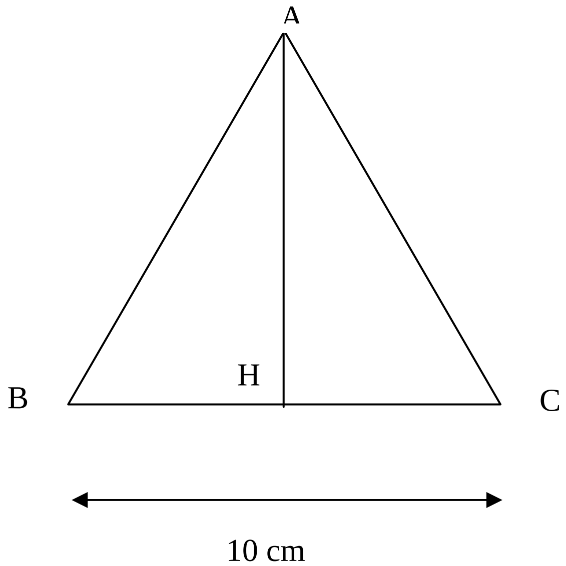
Après avoir calculé la longueur HC, le calcul de la longueur HA est immédiat.

Pour gagner du temps, j'ai repris la main pour leur montrer rapidement que l'étude du cas où le point "M" était sur un des côtés se faisait sans problème et que le résultat conjecturé restait valable.

Une élève a voulu savoir ce qui se passait lorsque le point M était à l'extérieur du triangle. J'ai proposé la recherche à la classe et l'étude de quelques dessins les a persuadés que la somme des trois distances pouvait être bien supérieure à la hauteur du triangle... Je ne suis pas allé plus loin sur le point et je les ai laissés sur cette constatation visuelle.

Pour continuer l'exploration de cette situation, je leur ai posé la question suivante :

Quelle serait le côté (en cm) d'un triangle équilatéral dont la hauteur meurerait 10 cm ?



En faisant un parallèle avec le calcul de la hauteur du triangle équilatéral, le résultat a été obtenu sans trop de difficultés.

La longueur obtenue n'est qu'une valeur approchée qui peut malgré tout être utilisée pour le tracé d'un tel triangle.
Nous avons pris le temps d'explorer plusieurs types de construction "à la règle et au compas" : à partir du tracé de deux droites perpendiculaires sécantes en H, le tracé du segment [HA] et de l'angle $\widehat{HAC}$ mesurant 30° ou le tracé de deux droites parallèles distantes de 10 cm et d'un angle de 60° dont un côté est inclus dans une des deux droites.

J’ai ensuite expliqué que nous allions utiliser ce qui venait d’être découvert et prouvé pour un type particulier de représentation graphique.

Si les trois côtés d’un triangle équilatéral de hauteur 100 mm visualisent les trois critères d’un traitement de données, les distances à ces côtés peuvent indiquer les pourcentages représentant chacun de ces critères (les 100 % du total des trois pourcentages seront représentés par le total des trois distances aux côtés du triangle).

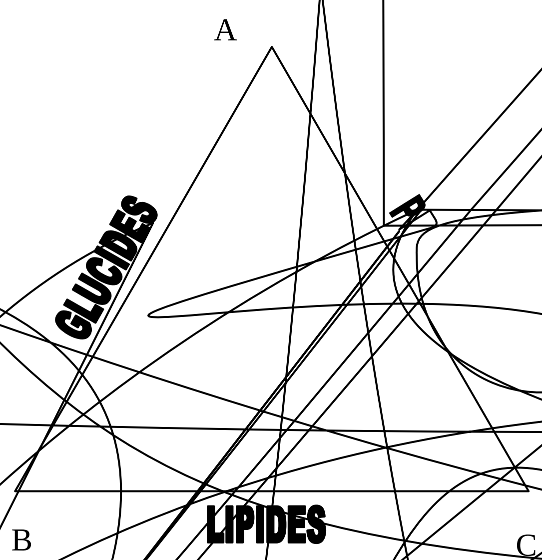
A tout point du triangle pourront correspondre les pourcentages représentant les trois critères représentés par les trois distances aux côtés du triangle.

<u>Voici quelques exemples de “critères” représentables :</u>

Il existe trois méthodes pour fabriquer de l’électricité : thermique (gaz, charbon, pétrole), renouvelable (solaire, géothermique, hydraulique, éolienne), nucléaire. Selon les époques ou les pays, les proportions de ces trois types de production évoluent.

Le collège de Saint-Mihiel recrute sur trois cantons : Vigneulles les Hattonchâtel, Pierrefitte sur Aire et Saint-Mihiel. Les proportions des élèves selon les années peuvent être étudiées.

Les composants des aliments sont classés en trois grandes catégories : les lipides, les protides et les glucides. Des pistes d’échanges peuvent être ouvertes avec des collègues travaillant sur la nutrition (voir en annexe le tableau joint).



Où sont représentés les aliments comportant 0 % de protides ?
Où est représenté un aliment comportant autant de lipides que de glucides et de protides ?
Existe-t-il des aliments représentés par les sommêets du triangle ?
Où se trouvent les aliments comportant plus de glucides que de protides ?

Voici l'exercice proposé à la suite en classe

Trace un triangle équilatéral ABC de 10 cm (100 mm) de hauteur.

	LIPIDES	GLUCIDES	PROTIDES
Aliment A	10 %	20 %	
Aliment B		20 %	25 %
Aliment C	80 %		10 %

Les aliments A, B et C ont autant de lipides que de glucides.
Dans le triangle tracé précédemment, où se trouvent les points A, B et C représentant ces éléments ?

Cet exercice ne présente a priori que peu d'intérêt : il aurait été préférable de travailler avec de vrais aliments, tels ceux de l'annexe jointe…

Contenus mathématiques rencontrés :
La présentation de l'énoncé de départ peut s'assimiler à un problème ouvert aisé à mettre en œuvre.
La notion de distance d'un point à une droite est à mettre rapidement en relation avec la notion de hauteur d'un triangle utilisée dès la classe de cinquième. Il sera temps de préciser plus tard qu'en classe de quatrième que nous appellerons hauteur d'un triangle la droite permettant de trouver cette distance d'un sommet au côté qui lui est opposé.
La formule permettant le calcul de l'aire d'un triangle est utilisée dans la démonstration de la propriété constatée.
Le calcul du côté d'un triangle équilatéral de 10 cm de hauteur fait intervenir les propriétés du triangle équilatéral et le théorème de Pythagore.
La réponse à la question “Où est représenté un aliment comportant autant de lipides que de glucides et de protides ?” permet la rencontre avec le fait qu'un point de la bissectrice d'un angle est à égale distance des côtés de l'angle.

Les tracés possibles « à la règle et au compas » d'un triangle équilatéral de 10 cm de hauteur utilisent les propriétés du triangle équilatéral ainsi que l'écartement constant de deux droites parallèles (les compléments des nouveaux programmes de l'école élémentaire incitent à rencontrer ce point de vue qui est facilité par l'usage de l'équerre rapporteur ou de toute autre équerre dont l'axe de symétrie est utilisé).

L'utilisation de pourcentages, la création et l'analyse de représentations graphiques s'insèrent dans la partie « gestion de données » de notre enseignement. De plus, ils sont supports d'activités touchant d'autres disciplines. Pourquoi ne pas présenter ce type de représentation aux collègues des matières intervenant dans les thèmes de convergence ? Ce sera l'occasion à ces matières de se mettre au service des mathématiques en refaisant vivre cette situation riche en mathématiques.

L'année de cette expérimentation, mes élèves de quatrième bénéficiaient de quatre heures de mathématiques hebdomadaires. Actuellement, comme presque tout le monde, nous ne bénéficions plus que de trois heures et demie. Cependant, dès que j'aurai de nouveau une classe de quatrième, au vu de la richesse des contenus rencontrés, je continuerai à prendre deux ou trois heures pour faire vivre cette situation.

Annexe :

GLUCIDES, PROTIDES, LIPIDES ET VALEURS ENERGETIQUES DES ALIMENTS COURANTS.

	GLUCIDES %	PROTIDES %	LIPIDES %	CALORIES POUR 100g

SIXIEME : DEUX RECTANGLES ACCOLES

François Drouin

Présentation de la recherche

Les élèves, en classe de sixième, ont encore beaucoup en tête l'utilisation d'une formule pour trouver un périmètre. Le travail proposé permet de faire rencontrer diverses méthodes pour trouver le périmètre d'un polygone dessiné sur un quadrillage. Des validations sont élaborées suite aux propositions des élèves. Pendant les trois heures prises pour ce travail, des prolongements de la recherche initiale ont eu lieu.
Volontairement, des résultats obtenus par les élèves ont été écrits en utilisant des lettres. Cette approche s'est faite en douceur, la lecture des lettres dans les formules s'est toujours faite en donnant le mot français représenté par la lettre.
Ces recherches intéressent tous les élèves. Tous cherchent et ont quelque chose à proposer. Lors des temps de synthèse, je reconnais que les bons élèves sont utiles pour faire avancer les choses… Cependant le but principal étant une appropriation par tous de la notion de périmètre, le fait que les élèves en difficulté soient parfois un peu à la traîne lors de l'élaboration des preuves n'est pas un handicap : on ré-explique…
Le temps passé n'a pas lassé les élèves car petit à petit de nouvelles pistes sont explorées. La trace de cours sur le cahier des élèves a consisté en l'écriture des différentes méthodes rencontrées pour trouver le périmètre d'un polygone dessiné sur un quadrillage.

Enfin, ce type de recherche a toute sa place dès l'école élémentaire. A part peut-être une plus grande prudence lors de l'utilisation des formules, les contenus rencontrés ici l'ont déjà été au Cycle III.

Contenus abordés en préalable

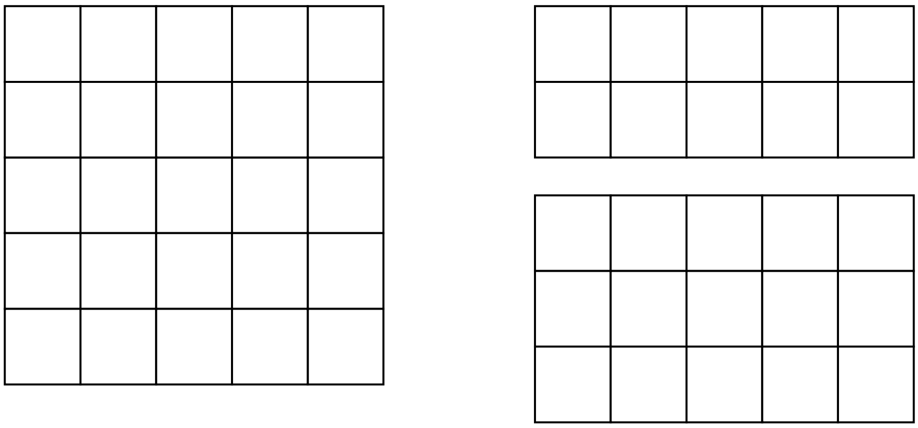
Diverses méthodes pour calculer le périmètre d'un rectangle ont été vues ou revues :
$p = L + l + L + l$
Cette méthode a été mise en avant pour privilégier le sens du mot « périmètre » : longueur du pourtour.
$p = 2 \times (L + l)$
Cette méthode est celle présente dans la tête de bien des élèves à l'entrée en sixième. Elle a été justifiée en classe par l'utilisation de parenthèses dans l'écriture de la première méthode : $p = (L + l) + (L + l)$ donc $p = 2 \times (L + l)$.
$p = 2 \times L + 2 \times l$
Cette méthode a été justifiée par un autre regroupement dans l'écriture de la première méthode : $p = L + l + L + l$, donc $p = L + L + l + l$, donc $p = (L + L) + (l + l)$,
donc $p = 2 \times L + 2 \times l$.
L'utilisation de lettres « p », « L », « l » pour évoquer les périmètres, les longueurs et les largeurs n'a créé aucune difficulté.
Ces deux dernières méthodes pourront être reprises en classe de cinquième lors de l'étude de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Par ailleurs, la possibilité de « ranger » un polygone dans un rectangle a été rencontrée lors de la recherche de l'aire d'un cerf-volant.

Activité « Deux rectangles accolés et des polygones »

Elle a été présentée et décrite dans le Petit Vert n° 71 (bulletin de la régionale APMEP Lorraine de septembre 2002).

Rappel de l'activité

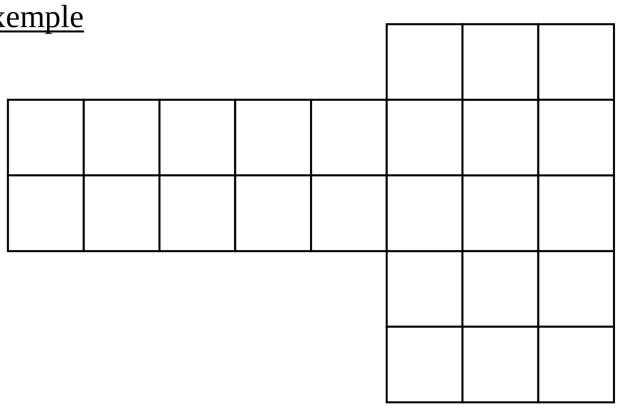


L'unité de longueur est la longueur d'un côté de carreau du quadrillage.
L'unité d'aire est l'aire d'un carreau du quadrillage.

Un carré 5×5 est découpé en un rectangle 3×5 et un rectangle 2×5.

Les deux rectangles sont assemblés pour former un polygone. Les deux rectangles doivent se toucher par un nombre entier de côtés.

Exemple



Premières questions :

Quel polygone a le plus grand périmètre ?
Quel polygone a le plus petit périmètre ?

Question supplémentaire :

Le périmètre peut-il prendre toutes les valeurs entières comprises entre le maximum et le minimum repérés aux questions précédentes?

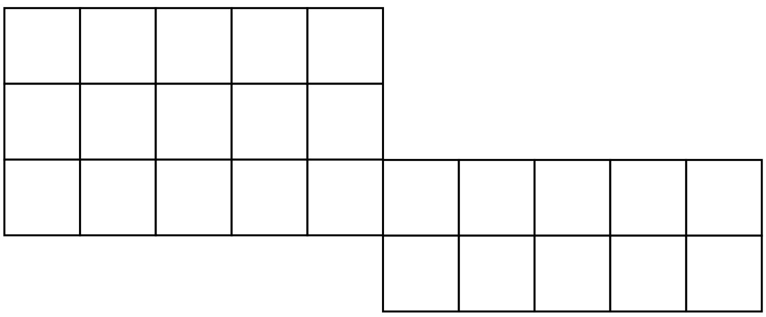
Déroulement de l'activité

Pour gagner du temps, des carrés 5×5 avaient été préparés à l'avance. Le quadrillage à l'intérieur de ces carrés était celui des cahiers des élèves. Cela a évité que les élèves en difficulté peinent à reproduire sur leur cahier les polygones réalisés avec les deux rectangles en papier. Les problèmes d'échelle n'avaient pas à perturber l'activité.

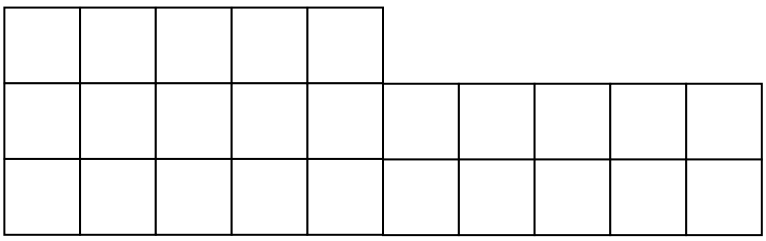
Un temps d'explication supplémentaire a été nécessaire pour faire comprendre à tous les conditions de juxtaposition des rectangles : certains élèves envisageaient de les faire se « toucher » par un sommet seulement. Comment leur donner tort puisque « 0 » est un entier… ?
La recherche a commencé et aux élèves à la traîne a été donnée la consigne supplémentaire de faire au moins 5 dessins de polygones et d'écrire sous chacun d'eux le périmètre « longueur totale du pourtour ». Une petite aide supplémentaire a été donnée aux élèves en grande difficulté : marquer d'une croix le sommet par lequel ils commencent l'étude du pourtour…

La classe s'est mise au travail. Un premier temps de synthèse a permis de repérer le plus grand périmètre actuel et le plus petit périmètre actuel.
Les méthodes de calcul du périmètre d'un rectangle et la première partie de la recherche ont duré (pendant) une heure de cours. Pour la fois suivante, je leur ai demandé de tenter d'améliorer les records actuels (les maximum et minimum attendus avaient été repérés, sans certitude chez les élèves).
En début de deuxième heure, nous avons fait le bilan des recherches. Le périmètre minimal semblait être obtenu avec la reconstruction du carré initial. Le périmètre maximum a été repéré avec comme justification, plus la figure est étirée, plus le périmètre est grand.

Ci-dessous, voici une des figures proposées par les élèves :



Voulant en savoir plus à propos de cette notion de « figure étirée », je leur ai proposé la figure ci-dessous en leur demandant laquelle des deux était la plus « étirée ».



La réponse fut « la première » parce que les rectangles se touchent par moins de côtés. J'ai profité de cette remarque pertinente pour leur demander si nous ne pouvions pas trouver le périmètre des polygones dessinés en utilisant le nombre de côtés de carreaux des jonctions.

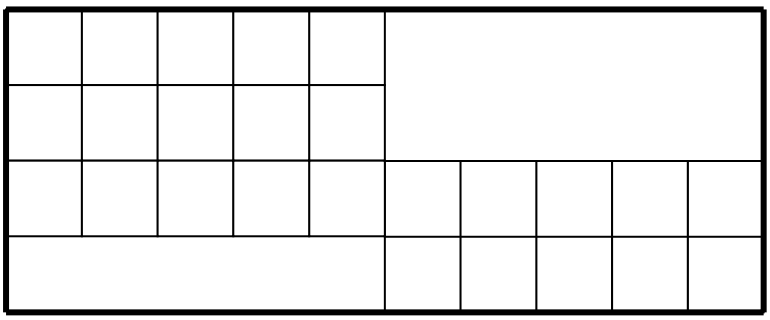
La première proposition a été « on additionne les périmètres des rectangles et on enlève le nombre de côtés où ils se touchent ». Cette proposition a été invalidée par l'étude de la première des deux figures ci-dessus. Finalement, un élève a dit qu'il fallait compter deux fois les côtés « où ils se touchent ». Cette seconde proposition a été acceptée par la classe.
Pour la résumer, j'ai écrit au tableau que pour calculer le périmètre de ces polygones, on calculait « $P + p - 2\times c$ », « P » étant le périmètre du grand rectangle, « p » le périmètre du petit rectangle et « c » le nombre de cotés de carreaux de la jonction.
Pour revenir aux maximum et minimum demandés, il est vite apparu que le maximum était obtenu lorsqu'on retirait le moins de côtés de carreaux et le maximum lorsqu'on en retirait le plus de côtés de carreaux. Les propositions de dessins correspondants ont pu être validées.

Je leur ai ensuite demandé d'utiliser cette méthode pour vérifier les périmètres des polygones qu'ils avaient dessinés. De nombreuses erreurs de comptage ont été alors repérées…

Je leur ai ensuite demandé d'examiner maintenant la question « Le périmètre peut-il prendre toutes les valeurs entières comprises entre le maximum et le minimum repérés aux questions précédentes? ».
Les élèves ont été surpris de ne trouver que des nombres pairs dans leurs résultats corrigés. Nous sommes revenus à la formule « $P + p - 2\times c$ » qui est devenue « $16 + 14 - 2\times c$ », puis « $30 - 2\times c$ ». Les élèves ont vite dit que « c'était pair parce qu'on enlevait deux fois quelque chose à 30».
Restait à voir si toutes les valeurs paires entre le maximum et le minimum étaient atteintes. « c » est au moins égal à 1, d'après les conditions données lors des tracés. Nous avons fait les calculs pour « c » prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et avons pu valider le fait que tous les nombres pairs entre 20 et 28 étaient atteints.

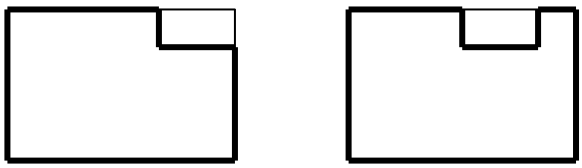
Pour poursuivre la recherche sur ces polygones, je leur ai dit que je connaissais une autre preuve du fait que le périmètre des polygones formés de 2 rectangles accolés dessinés sur un quadrillage était toujours un nombre pair.

Je leur ai rappelé la méthode de « l'entourage par un rectangle » rencontrée lors de la recherche de l'aire d'un cerf-volant. Cette approche a été faite pendant une troisième heure de cours.



Les élèves ont entouré leurs polygones par des rectangles dont ils ont indiqué leurs périmètres. Le fait que les périmètres des rectangles étaient égaux aux périmètres des polygones entourés les a d'abord surpris, mais rapidement la justification attendue a été trouvée.

Je leur ai demandé si le périmètre d'un polygone tracé sur le quadrillage était toujours égal à celui du rectangle qui l'entourait.
Chaque élève a tracé un ou deux polygones entourés par un rectangle et a comparé les périmètres. La synthèse a montré que les périmètres étaient parfois égaux, parfois différents. Certains (bons) élèves avaient cherché à compliquer le polygone de départ. D'autres (plus en difficulté) se sont contentés de figures simples qui ont pu être analysées en classe. Il est apparu, qu'à partir d'un rectangle, on « mordait dans les coins », on gardait le même périmètre, mais si on « mordait dans les côtés », on ne gardait pas le même périmètre, ce qui correspond aux deux situations dessinées ci-dessous



Je leur ai ensuite demandé de dessiner sur le quadrillage au moins 5 polygones de périmètre 24.
Il est paru nécessaire de chercher des (les ?) rectangles de périmètre 24. Les élèves, après quelques « essais erreurs », ont eu envie de fixer une dimension puis de trouver l'autre. La première proposition a été « on fait 24 – 2 fois la première dimension ». Cette proposition a été invalidée par un contre-exemple et la nécessité de diviser le résultat précédent par deux est apparue. La méthode a été résumée par « $(24 - 2 \times c) : 2$.
Les élèves ont tenté de donner à « c » les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Ils se sont arrêtés là car dans leur tête, ils fixaient la largeur et cherchaient la longueur. Je leur ai demandé ce qui se passait pour les valeurs 6, 7, 8…. Ils ont reconnu les valeurs précédentes considérées comme des largueurs. Pour aller plus loin, je leur ai demandé d'examiner les valeurs 0 et 12, puis les valeurs 13, 14… Les deux premières ont perturbé les élèves, j'ai évoqué des rectangles aplatis … Pour les deux autres nous avons mis en évidence une impossibilité de calcul, donc une impossibilité de dessiner un rectangle de longueur 13 et de périmètre 24.

Finalement, tous les élèves ont réussi à tracer sur le quadrillage 5 polygones de périmètre 24…
Un prolongement possible serait le dénombrement de ces polygones de périmètre 24. Ce problème est alors nettement plus ardu et pourrait intéresser des enseignants aimant eux aussi les situations de recherche…

ANNEXE : EXAMEN STATISTIQUE DES PROPRIETES PRODUITES SUR LES SPIROLATERES

Au cours de la première année d'expérimentation de la séquence sur les spirolatères, nous avons regardé de près les propriétés produites par les élèves.

On peut considérer les propriétés produites en les triant par rapport à un certain nombre de critères. Ce choix méthodologique a sa limite car il est biaisé par les choix de tri produits par les professeurs.
Il apporte toutefois quelques informations.

Vraies ou fausses…

69 % des propriétés énoncées sont exactes.
Nous considérons comme exactes les assertions qui le sont mais aussi celles pour lesquelles il n'était pas raisonnable d'espérer que les élèves de quatrième « lèvent le lièvre » : il en va ainsi des propriétés (78) et (87) concernant les spirolatères dont la longueur est un multiple de 4.

2 % des propriétés sont exactes, mais leur libellé montre que l'élève n'a pas compris complètement ce qu'il écrit : c'est le cas des propriétés (86) et (98)[9].

12% des propriétés sont fausses :

- 2 % de propriétés toujours fausses : l'élève s'est trompé sur un exemple et il a généralisé son erreur.[10]
- 10 % de propriétés fausses car l'élève a produit une généralisation abusive à partir de quelques exemples[11] ou alors il pose comme nécessaire une condition suffisante.[12]

9% des propriétés sont discutables. Il est nécessaire de s'accorder sur un point pour savoir si elles sont justes ou fausses.[13]

6% des propriétés n'ont pas de valeur de vérité. Il peut s'agir d'opinions sur l'esthétique des spirolatères[14] ou de phrases incompréhensibles[15].

Les autres assertions sont des questions.

Locales ou générales…

Nous pouvons classer les propriétés suivant quatre catégories :

- Les propriétés triviales[16] (8%)

---

9 Quand l'élève écrit « avec des chiffres qui se suivent il y a un centre de symétrie », il écrit quelque chose de juste mais de très partiel.

10 Exemple : (40) Si on prend trois chiffres, deux identiques et un au milieu, on obtient un rectangle.

11 Exemple : (106) Si on a 4 chiffres identiques 2 à 2 on a un rectangle.

12 Exemple : (62) Avec 5 nombres, pour que ça se termine, il faut que le 1er, le 3ème et le 5ème nombre soient égaux ainsi que le 2ème et le 4ème.

13 Exemple : (84) Quand on change le sens de parcours on obtient la même figure. Il faudrait s'accorder sur ce que signifie « la même figure » : si cela signifie isométrique, la propriété est vraie, si cela signifie superposable par un déplacement, c'est faux.

14 Exemple : (66) Plus il y a de nombres, plus la figure est belle.

15 Exemple : (112) On peut continuer les figures soit en bas à gauche ; à droite ou à gauche.

- Les propriétés générales, concernant tous les spirolatères ou tout un large sous ensemble de ceux-ci. (62%)
- Les propriétés locales, ne concernant qu'un petit ensemble de spirolatères (8%) voire un (ou quelques) spirolatère particulier[17] (16%).[18]

Le sujet abordé

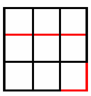
- 40% des propriétés parlent de la forme des spirolatères. Il peut s'agir de propriétés signalant que dans certaines circonstances on obtient un rectangle, ou de descriptions des figures obtenues pour les longueurs multiples de 4 (on trouve une « échelle », un « escalier »..).
- 38% des propriétés concernent le fait que le spirolatère boucle ou non.
- 7% des propriétés font référence aux propriétés de symétrie ou de rotation.
- 7% des propriétés parlent de la taille de la figure, de l'incidence d'action sur les nombres (multiplier par 2, ajouter 1..) sur celle-ci.
- 6% des propriétés concernent l'influence de l'ordre des nombres sur la figure obtenue.
- Marginalement, on trouve enfin des allusions au rôle du sens de rotation choisi, ou à la périodicité du tracé.

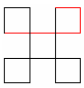
La clarté du propos

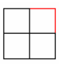
On peut enfin considérer les propriétés du point de vue de l'ambiguïté éventuelle de la rédaction.
16% des propriétés peuvent encourir ce reproche. Toutes les autres, indépendamment de leur valeur de vérité, sont rédigées clairement.

Liste des propriétés produites dans les huit classes

(1) Et si on changeait de sens ?
(2) S'il n'y a que deux nombres, on obtient un rectangle. Avec trois nombres peut-on obtenir un rectangle ?
(3) Avec trois nombres identiques, on obtient un carré.
(4) Et si on utilisait plus de trois nombres ? (Avec 4 ça semble ne pas se refermer alors que ça se referme avec 3)
(5) Les figures obtenues admettent un centre de symétrie.

(6)  Une figure de ce type est obtenue avec 3-2-2, avec 2-3-2.
(7) Si les nombres sont deux fois plus grands, la figure est deux fois plus grande.

(8)  Ce motif apparaît avec 2-2-6, ou 6-2-2 ou 2-6-2. L'ordre des 3 nombres est-il important ? On obtient un motif semblable mais avec des carrés de taille différente avec 2-15-2 ou 1-4-1 ou 1-1-4 ou 1-1-5 ou 12-2-2 ou 11-1-1.
(9) 3-4-5 ou 2-3-4 ou 4-6-8 donnent des motifs semblables mais la taille change.
(10) 3-6-9 et 3-2-1 donnent le même dessin mais pas avec la même taille.

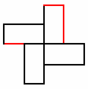
(11)  Ce motif est obtenu avec 2-2-4 ou 2-4-2 ou 4-2-2.

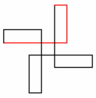
---

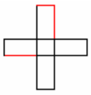
16 Exemple : (20) Il existe des grands et des petits spirolatères.

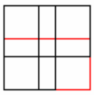
17 Exemple : (37) 2-4-2-4 et 4-8-4-8 donnent un rectangle.

18 Le tri opéré par les professeurs dans certaines classes a considérablement (d'après eux) réduit le nombre de propriétés très locales.

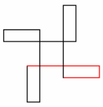
(12)  Ce motif est obtenu avec 1-2-3 ou 3-2-1 ou 2-4-6 ou 4-2-6 ou 5-2-3 ou 6-18-12 ou 6-4-2 ou 2-5-3.

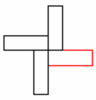
(13)  Ce motif est obtenu avec 1-3-5 ou 1-9-2 ou 3-2-9.

(14)  On obtient une croix avec 1-3-3. Avec 6-3-6 la croix est formée de 5 carrés.

(15)  Ce motif est obtenu avec 5-3-3.

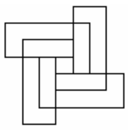
(16) Avec certains chiffres on retombe sur le départ.
(17) Si on prend toujours les mêmes chiffres, on obtient un carré.
(18) Le nombre de chiffres doit toujours être impair.
(19) On arrive toujours à l’arrivée.
(20) Il existe des grands et des petits spirolatères.
(21) Si on a quatre chiffres, le spirolatère se dessine à l’infini.
(22) Si on double les nombres, la figure est deux fois plus grande.
(23) On peut avoir des spirolatères qui ne se ferment pas.
(24) On peut avoir des spirolatères qui ne se terminent pas.
(25) Un spirolatère à 1 chiffre est toujours un carré.
(26) Un spirolatère à 2 chiffres est toujours un rectangle.
(27) Un spirolatère à 3 chiffres est formé de carrés et de rectangles l’un dans l’autre.
(28) Un spirolatère à 4 chiffres ne se termine pas.
(29) Un spirolatère à 5 chiffres est comme un spirolatère à 3 chiffres.
(30) Si tous les nombres sont identiques on obtient un carré.
(31) Si le total des nombres fait 15 alors le spirolatère ne se termine pas.
(32) Il existe des spirolatères de plusieurs formes.
(33) 4-3-2-1 et 1-2-3-4 donnent la même figure.
(34) Si on choisit certains chiffres on obtient une figure à l’infini.
(35) Si on a 3 chiffres identiques, si on en ajoute un ou si on en enlève un, ça donne la même figure.
(36) En augmentant de 1 tous les chiffres, on trouve la même figure en plus grand.
(37) 2-4-2-4 ou 4-8-4-8 donnent un rectangle.
(38) 2-2-2-2 ou 4-4-4-4 donnent un carré.
(39) Si on prend deux mêmes chiffres à la suite, on obtient une croix où il y a un carré à l’intérieur.
(40) Si on prend trois chiffres, deux identiques et un autre au milieu, on obtient un rectangle.
(41) 5-6-1 forme quatre colonnes qui se succèdent.
(42) 9-6-3 forme un rectangle et il y a une droite horizontale.
(43) Il n’y aura jamais de triangles, de losanges…

(44)  6-1-3 donne une figure avec des rectangle et un carré.

(45)  4-1-3 donne une figure avec des rectangles
(46) J'ai l'impression que les nombres impairs se finissent (3 et 5 fonctionnent) par rapport aux nombres pairs (4 ne fonctionne pas toujours).
(47) Avec 5 chiffres, ça se termine tout le temps. Ex : (1,2,3,4,5) et (4,5,3,2,1) se terminent.
(48) Avec 2 chiffres, on obtient à chaque fois un carré ou un rectangle (quand il y a un zéro, on obtient un segment).
(49) Avec 4 nombres, pour que ça se termine, il faut que le 1er et le 3ème soient égaux, ainsi que le 2ème et le 4ème
(50) Avec 3 nombres, ça se termine toujours, quels que soient les nombres que l'on choisit
(51) (5,4,3,2,1) donne le même motif que (1,2,3,4,5) sauf qu'il est de l'autre sens.
(52) Lorsque tous les chiffres sont pareils, ça se termine.

(53) Il y a un centre de symétrie pour chaque figure terminée.
(54) Avec 4 nombres, le spirolatère ne se termine pas, sauf lorsque tous les nombres - ou le 1er et le 3ème ainsi que le 2nd et le 4ème - sont identiques (ou quand le 1er et le 3ème ainsi que le 2nd et le 4ème). Exemple : (1,2,1,2) et (3.3,3,3) se terminent et (1,2,3,4) ne se termine pas.
(55) Avec 3 chiffres, il y a toujours une fin.
(56) J'ai remarqué que les spirolatères qui sont composés de 5 chiffres ne se terminaient pas tous. Ce3.6(pas t)3see se taorm

(102) Quand il y a trois chiffres, ça se boucle.
(103) Pour faire une droite, on met des zéros entre les autres chiffres et leurs flèches des autres chiffres (ex : si les zéros ont des flèches haut et bas, les autres chiffres auront des flèches gauche et droite).
(104) Si on veut obtenir un carré, il faut mettre les 4 mêmes chiffres
(105) Si on a 4 même chiffres identiques, alors on obtiendra un carré.
(106) Si on 4 chiffres identiques 2 à 2, alors on a un rectangle.
(107) Lorsqu'on prend une suite de chiffres consécutifs, on obtient un spirolatère en forme d'escaliers.
(108) Si on prend toujours les mêmes nombres, on obtiendra un carré.
(109) Si on prend les mêmes mesures, les figures se développent à l'infini.
(110) Si on prend 4 chiffres consécutifs et qu'on reparte du point de départ, on obtient une figure et puis si on change les chiffres, la figure augmente ou diminue.
(111) Si l'on prend les 2 mêmes nombres pour monter ou descendre et 2 chiffres pareils pour aller à gauche ou à droite, on obtient un rectangle.
(112) On peut continuer les figures soit en bas à gauche, à droite ou à gauche.
(113) Si l'on change de sens les nombres, on n'obtient pas les mêmes figures.
(114) Est-ce qu'on peut avoir deux droites parallèles ?
(115) Est-ce qu'on peut avoir une spirale ?
(116) Est-ce qu'on peut avoir une forme terminée ?
(117) Est-ce qu'on ne peut ne pas bouger sur un point ?
(118) Les spirolatères peuvent se faire à partir de 1 ou plusieurs nombres
(119) Si nous mettons une suite de quatre chiffres identiques, alors nous obtenons un carré.
(120)Dans un spirolatère, les figures forment tous un angle droit.
(121) Les spirolatères se rejoignent ou continuent infiniment.
(122) Il existe plusieurs spirolatères, mais certain ne se bouclent pas toujours.
(123) Dans un spirolatère, les formes se répètent et si le nombre des chiffres est impair alors le spirolatère se boucle.
(124) En prenant un chiffre pour former un spirolatère cela nous donne un carré
(125) Si dans un spirolatère, on écrit une suite de nombre (1,2,3,4,5) la figure se répétera
(126) Si dans un spirolatère, on répète le même chiffre la figure bloque, on peut plus finir la figure.
(127) Il y a que des carrés et des rectangles, jamais de cercle ni de triangle.
(128) Ça fait un circuit. Certains circuits ne se ferment pas.

(129) 1-4-2-5-3 donne 

(130) 1-5-6-4-3