

1. Arbres fractales en 5^{ème} (2005-2006)

Réalisation :

Olivier Viennet, professeur de mathématiques
Collège Charles de Gaulle, Fameck

Objectifs :

Ce projet vise notamment les *objectifs disciplinaires* suivants :

- donner un exemple concret d'application des mathématiques,
- faire manier les instruments de géométrie dont l'acquisition reste approximative pour certains élèves (rapporteur notamment),
- réaliser un travail rigoureux et soigné,
- élargir la vision des mathématiques en découvrant le principe d'objet fractal.

Mais cette activité avait aussi pour but d'atteindre des *objectifs non disciplinaires et transversaux*, à savoir :

- motiver des élèves,
- travailler en groupe,
- faire acquérir une certaine autonomie,
- réaliser un compte rendu,
- présenter un exposé.

Déroulement :

Afin de réaliser leur travail, les élèves avaient à leur disposition :

- les livres et manuels du CDI,
- des liens vers des sites Internet sélectionnés et adaptés,
- une brochure réalisée et fournie par le professeur expliquant la démarche, et donnant un cadre plus large aux objets fractals.

La recherche s'est effectuée en groupes de 2 à 3 élèves, puis la production de la figure a été individuelle.

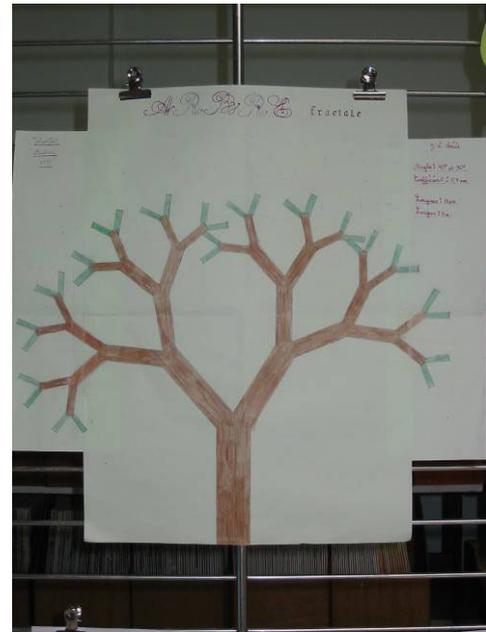
Après avoir assisté à une présentation du projet, les élèves ont pris connaissance des documents mis à leur disposition. La phase d'étude puis de réalisation s'est ensuite déroulée sur plusieurs séances (en dehors des heures de mathématiques) selon les disponibilités des élèves. Ils ont été placés en situation d'autonomie au CDI.

Travaux réalisés :

La restitution était demandée sous forme d'un tracé géométrique d'un objet fractal. Celui-ci nécessite les calculs des longueurs appropriées et le bon maniement des outils de géométrie. Les travaux étaient généralement de bonne qualité, en raison de l'investissement personnel d'une majorité des élèves. De nombreux élèves ont été très fiers de leur réalisation qui a été affichée en évidence au CDI.



Panneau d'arbres fractales



Un exemple de réalisation

Conclusion :

Cette réalisation est très enrichissante, en raison des nombreux outils qu'elle permet de mettre en œuvre, et elle trouve sa place dans le cadre du programme. Au-delà de l'aspect esthétique non négligeable, les réalisations ont montré la diversité des formes que peuvent engendrer le choix de quelques paramètres seulement, en utilisant implicitement la notion de variable. La découverte de la notion de fractale en géométrie et sa modélisation permettent une large ouverture vers les sciences naturelles, comme les élèves ont pu le voir à travers d'autres exemples.

2. Mesure de la hauteur d'un arbre en 4^{ème} (2006-2007)

Objectifs :

- disciplinaires : donner un cadre concret à deux nouveaux outils introduits en 4^{ème} : le théorème de Pythagore et la trigonométrie,
- non disciplinaires : motiver les élèves, donner une ouverture d'esprit, développer l'esprit critiques,
- transversaux : réaliser un compte rendu, présenter un exposé.

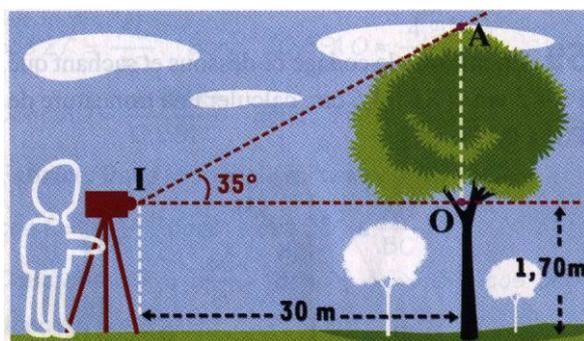
Analyse a priori

Le déroulement est prévu en trois phases :

- une présentation par le professeur, mettant en place la problématique,
- la prise de mesures concrètes et exploitables pour déterminer la hauteur de l'arbre,
- une synthèse visant à aboutir à un exposé, une affiche, ou tout autre document restituant le travail mené.

Pour des raisons de mise en place des groupes, il sera nécessaire pour une moitié de la classe d'anticiper la 3^{ème} phase, pendant que l'autre moitié prendra les mesures sur le terrain.

La première phase sera menée sous forme de classe dialoguée, et devra aboutir à la modélisation de la situation. Elle permettra de mettre en évidence le matériel nécessaire (à savoir un trépied et un niveau à bulle comme support, une règle pour le pointage, un rapporteur pour la mesure des angles, et un double décimètre pour mesurer la distance à l'arbre), et les mesures qu'il faut prendre sur le terrain. On aboutira sans doute à un schéma de ce type :



Durant la phase de mesure, les élèves devront mettre en oeuvre ce qui a été abordé précédemment. Il faudrait qu'ils puissent le faire de la manière la plus autonome possible. Les mesures seront faites sur plusieurs arbres, en veillant à ce qu'ils acquièrent une réelle autonomie.

La synthèse devra d'abord être réalisée au brouillon, pour que les élèves réfléchissent dans un premier temps sur le fond plutôt que sur la forme. Leur travail pourra prendre l'aspect qu'ils souhaitent, mais devra rendre compte des points suivants :

- matériel utilisé,
- explication (théorique) de la démarche,
- résultats obtenus dans la pratique.

Ils auront à produire un document de manière libre avec mon aide ou celle de la documentaliste.

Déroulement

Présentation

Les élèves sont invités à se rendre au CDI pendant deux heures consécutives de mathématiques.

Dans un premier temps, je présente le projet (pour la première fois). La découverte est donc totale.

La problématique est simple : comment peut-on mesurer un arbre ?

Quelques idées auxquelles on peut s'attendre apparaissent, comme le fait de grimper ou de couper l'arbre..., mais l'utilisation des outils mathématiques a du mal à émerger.

Je fais alors un schéma au tableau ; à ce moment la méthode à utiliser devient évidente pour plusieurs élèves.

On liste alors le matériel nécessaire, les outils mathématiques entrant en jeu, et les mesures à prendre concrètement sur le terrain.



Répartition en groupes

Dans un second temps, les élèves sont répartis en petits groupes (2 ou 3 élèves), et la classe est séparée en deux : une moitié travaille sur l'aspect théorique en préparant un document montrant la méthode à suivre, tandis que l'autre prend des mesures concrètes sur le terrain. Ces mesures se font sous ma surveillance et avec mes conseils, tandis que les autres élèves travaillent au CDI avec l'aide de la documentaliste.

Au CDI : la documentaliste aide les élèves à prendre des notes suite à la présentation de la démarche expliquée par leur professeur de mathématiques. Elle leur donne quelques conseils au sujet de la prise de notes et sur la présentation ultérieure du travail qui se fera au moins en partie sous forme d'affiche.

Cette activité est reprise l'heure suivante avec le groupe qui est revenu de l'extérieur avec des relevés de mesures.



Sur le terrain :

Le choix est porté sur la mesure d'un grand cèdre de l'Atlas, et dans un second temps d'un sapin (quelques jours avant Noël ...). Le matériel est rapidement pris en main et utilisé correctement. Les élèves n'ont pas de difficulté particulière à utiliser le double décimètre et le trépied pour se positionner à une distance exploitable de l'arbre. La principale difficulté réside en fait dans l'alignement de l'oeil avec la règle pour obtenir une mesure d'angle correcte, et il est nécessaire de les reprendre souvent sur ce point. La mesure du second arbre est par contre faite en autonomie complète.



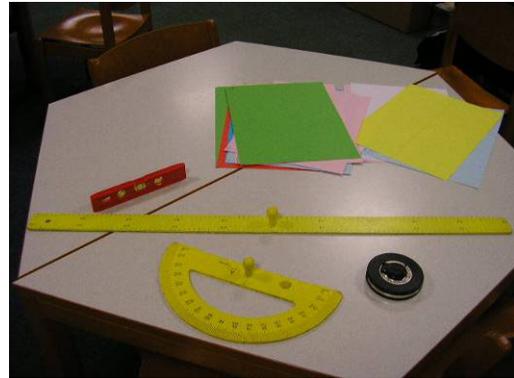
Mise en place :
mesure de la distance jusqu'au pied de l'arbre



Mesure de l'écart angulaire



Alignement correct de l'œil de l'observateur



Matériel utilisé

Synthèse

De retour au CDI, les élèves entament le travail de synthèse, à savoir effectuer les calculs pour déterminer la hauteur du cèdre. Sur un brouillon ils parviennent quasiment tous au résultat.

Les plus rapides ont le temps de commencer la présentation de la méthode et des résultats au propre, alors que d'autres doivent repenser la présentation de leur travail car ils se sont trop précipités et proposent une composition assez incompréhensible, bien que la hauteur obtenue soit généralement correcte.



Prolongement

Les élèves ont ensuite à terminer leur document comme travail personnel. Celui-ci fera l'objet d'une évaluation, après avoir été repris et amélioré si nécessaire suivant les conseils du professeur.

Analyse a posteriori

Première phase

Malgré les exercices faits sur le cosinus, les élèves n'ont pas facilement fait le lien avec la problématique réelle. J'ai dû présenter le schéma pour que le déclic se fasse. Il aurait peut-être été préférable de différencier cette analyse de la problématique en la réalisant à un autre moment, et en leur permettant peut-être de découvrir l'intégralité de la méthode.

Ainsi les élèves auraient pu mieux l'assimiler avant de la mettre en oeuvre. Mais ce sont les contraintes horaires et d'emploi du temps qui ont conduit à ce choix de tout faire en une séance.

Seconde phase

Mis à part quelques élèves (ayant peur du froid et d'avoir à sortir...), ils ont été très enthousiastes. Les mesures ont été prises avec sérieux, preuve que l'aspect pratique de la méthode présentée a été retenu. Lors de la mesure du premier arbre, il a cependant fallu veiller à ce que les élèves ne se précipitent pas trop. Il aurait peut-être été utile de les faire manipuler le matériel (décamètre, rapporteur et règle sur le trépied) avant de partir sur le terrain, pour mieux montrer les difficultés d'utilisation. Cependant, les élèves sont parvenus à utiliser le matériel de manière autonome dès la mesure du deuxième arbre. Pour des raisons de temps, le trépied n'a pas forcément été déplacé pour chaque binôme ; la mesure se limitant alors à celle de l'angle.

Pendant ce temps au CDI :

La prise de notes a été complétée par les mesures prises sur « le terrain ».

Chaque élève de la classe dispose d'une feuille A3 pour présenter son travail. Les élèves sont très motivés et travaillent avec beaucoup d'attention. Ils sont enthousiastes. Travailler en groupe ou équipe leur a beaucoup plu.

Plusieurs photos ont été tirées au CDI et dans la cour du collège (lors du relevé de la hauteur du cèdre et du sapin).

Travailler en partenariat professeur-documentaliste a permis aux élèves de prendre davantage plaisir à acquérir des compétences méthodologiques.

Troisième phase

Sans trop réfléchir sur la partie démarche, les élèves ont pour beaucoup souhaité réaliser les calculs nécessaires à partir de leurs mesures. C'est légitime, et cette possibilité ne leur a bien sûr pas été interdite. Pour beaucoup, ils les ont réalisés correctement et en autonomie... J'ai été agréablement surpris par rapport au travail que certains élèves réalisent en classe. La motivation par le cadre concret et le travail en groupe y sont sans doute pour beaucoup.

Par contre les difficultés ont été importantes lorsqu'il s'est agi de formaliser la méthode, beaucoup d'élèves n'en voyant pas l'intérêt. Il leur a alors été proposé de faire « comme s'ils l'expliquaient à un camarade ». Cela a souvent débloqué la situation. La documentaliste a par ailleurs eu le bon réflexe d'imposer l'utilisation et la réalisation d'un brouillon complet avant de passer au propre.

Travaux des élèves

J'ai, à plusieurs reprises, corrigé et rendu les travaux aux élèves pour qu'ils les améliorent. Certains étaient tout de suite de bonne facture, conformes au travail habituel de ces élèves, d'autres ont nécessité de nombreuses améliorations. Il a quelquefois

Au final, les élèves ont essayé de faire de leur mieux, même si certains rechignaient à recommencer un travail ayant subi trop de ratures et de modifications ; présenter un document propre ne paraissait pas une obligation pour tous.

Comment Calculer la hauteur d'un arbre?

* les objets à utiliser sont :

- une règle
- un rapporteur
- un mètre
- un appareil sur lequel on pose le rapporteur et la règle pour trouver le cosinus
- une calculatrice (scientifique)

* Nommons :

- le sommet de l'arbre : S .
- le pied de l'arbre (au niveau de la terre) : P .
- le niveau de la tête de l'observateur à son emplacement : O .
- la hauteur (sur le tronc) de la tête de l'observateur : A .

● = nombres trouvés par calculs.

Pour calculer la hauteur d'un arbre, il suffit de trouver le cosinus de l'angle \widehat{AOS} , puis après avoir trouvé la longueur SO , d'appliquer le théorème de Pythagore.

explication :

⑩ l'observateur doit se placer obligatoirement à une certaine distance de l'arbre qu'il notera bien sur. Dans notre exemple, il est à 20 mètres de l'arbre, qui est mesuré avec un mètre. À l'aide du rapporteur de la règle, et de l'appareil sur lequel on les place, on peut donc trouver le cosinus de \widehat{AOS} . Il est égal à 45° dans notre exemple.

Donc $\widehat{AOS} = 45^\circ$

- on sait que :
- $\widehat{AOS} = 45^\circ$
 - $AO = 20$ mètres

Donc, on peut calculer SO .

On sait que $\triangle AOS$ est un triangle rectangle en A donc :

$$\cos \widehat{AOS} = \frac{OA}{OS} \quad \left(\begin{array}{l} \text{côté adjacent} \\ \text{hypoténuse} \end{array} \right)$$

$$\cos 45^\circ = \frac{20}{OS}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{20}{OS}$$

$$0,707 \times OS \approx 20$$

$$OS = \frac{20}{0,707} \approx 28$$

Donc : $SO \approx 28$ mètres

$$(3) \triangle SPO \text{ rectangle en } A \Rightarrow SA + PA$$

$$SA + PA = 20 + 1,5 = 21,5 \text{ mètres}$$

Donc : l'arbre, le Cedre de l'Atlas mesure 21,5 mètres.

⑫ Pour trouver la hauteur de l'arbre, il ne nous reste plus qu'à chercher SA par le théorème de Pythagore $\Rightarrow PA$.

Je cherche à trouver SA .
Je sais que $SO = 28$; $AO = 20$; $\triangle SOA$ est rectangle en A .
Donc d'après le théorème de Pythagore : $SO^2 = SA^2 + AO^2$

$$50^2 = OA^2 + SA^2$$

$$28^2 = 20^2 + SA^2$$

$$784 = 400 + SA^2$$

$$SA^2 = 784 - 400$$

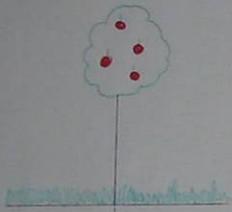
$$SA^2 = 384$$

$$SA = \sqrt{384}$$

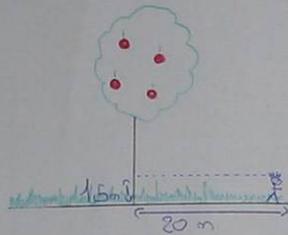
$$SA = 20$$

Donc $SA = 20$ mètres.

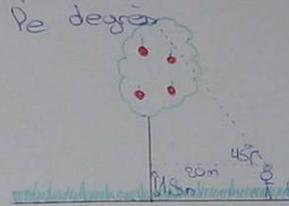
① Commencez par choisir un arbre !



② Éloignez vous à 20m de l'arbre



③ Cherchez l'angle \widehat{ABC} à l'aide d'un trépied en mettant le réticule sur 0° puis d'aligner la visée avec la pointe de l'arbre et regardez le degré



④ On sait que $\widehat{ABC} = 45^\circ$ que $CB = 20m$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BA}{BC}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{BA}{20}$$

$$\cos 45^\circ = 0,7071067811865475$$

$$0,7071067811865475 \approx \frac{20}{BA}$$

$$BA = \frac{20}{0,7071067811865475}$$

$$BA \approx 28,284271247461903 \text{ m}$$

COMMENT MESURER UN ARBRE ?

⑤ On sait que ABC est un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$AB^2 = 20^2 + 20^2$$

$$AB^2 = 400 + 400,4001$$

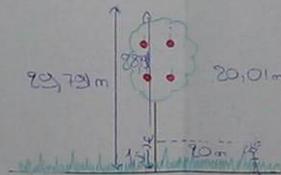
$$AB^2 = 800,4001$$

$$AB = \sqrt{800,4001}$$

$$AB = 28,281 \text{ au millième près}$$

⑥

L'arbre mesure 28,281 + 1,15
L'arbre mesure 29,431 m



⑦ Matériel : - RÈGLE
- RABORTEUR
- TRÉPIED
- 1 grand mètre (20m @)
- un arbre
- connaissance du cosinus et du théorème de Pythagore

La hauteur d'un arbre

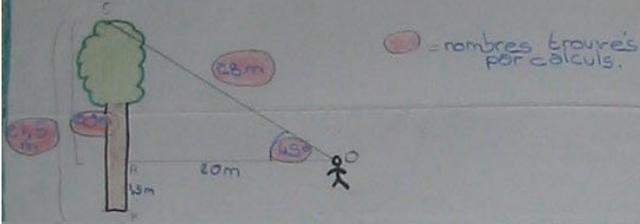
Cedre de l'Atlas



a-

Appellons :

- * le sommet de l'arbre : S
- * le pied de l'arbre : P
- * la tête de l'observateur : O
- * le niveau de la hauteur de la tête de l'observateur sur le tronc (par rapport au sol) : A



b- ① Pour trouver \widehat{AOS}

L'observateur doit se placer à une certaine distance de l'arbre, dans notre exemple à 20 mètres. Ceci est mesuré avec le mètre. À l'aide du rapporteur, de la règle, et de l'appareil sur lequel on les place, on trouve le cosinus \widehat{AOS} . Il est égal à $0,707$ dans notre exemple.

donc : $\widehat{AOS} = 45^\circ$

② Pour trouver SO.

On sait que :

- $\widehat{AOS} = 45^\circ$
- AO = 20 mètres.

Donc, on peut calculer SO. On sait que \widehat{AOS} est un triangle rectangle en A, donc :

$$\cos \widehat{AOS} = \frac{OA}{OS} \quad (\text{côté adjoint})$$

$$\cos 45 = \frac{20}{OS}$$

$$0,707 = \frac{20}{OS}$$

$$0,707 \times OS = 20$$

$$OS = \frac{20}{0,707}$$

$$OS = 28$$

donc : $SO = 28$ mètres.

Comment Calculer la hauteur d'un arbre ?

Il faut trouver le cosinus de l'angle \widehat{AOS} . Après avoir trouvé la longueur SO, nous devons appliquer le théorème de Pythagore.

Objets à avoir :

- * Un rapporteur
- * Une règle.
- * Un appareil sur lequel on pose le rapporteur et la règle pour trouver \widehat{AOS} .
- * Une calculatrice scientifique
- * Un décimètre
- * Le niveau à bulle

La hauteur d'un arbre

Cedre de l'Atlas

(Suite)



Pour trouver la hauteur du Cedre de l'Atlas, il ne nous reste plus qu'à trouver SA, et à additionner SA et PA.

③ Pour trouver SA.

On sait que :

- SO = 28 mètres.
- AO = 20 mètres.
- SOA est rectangle en A.

donc d'après le théorème de Pythagore on a :

$$SO^2 = OA^2 + SA^2$$

$$28^2 = 20^2 + SA^2$$

$$784 = 400 + SA^2$$

$$SA^2 = 784 - 400$$

$$SA^2 = 384$$

$$SA = \sqrt{384}$$

$$SA = 20$$

donc : $SA = 20$ mètres

④ Pour trouver la hauteur de l'arbre

Il s'additionne SA et PA.

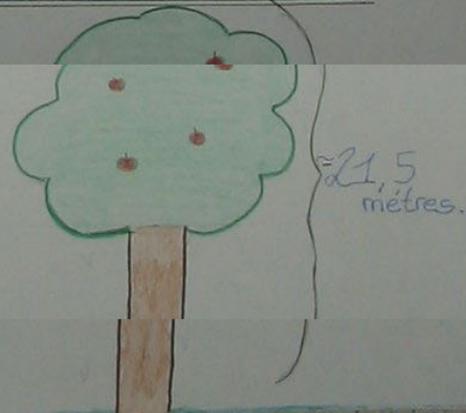
$$SA + PA$$

$$= 20 + 1,5$$

$$= 21,5$$

Donc : Le Cedre de l'Atlas mesure

environ 21,5 mètres (de hauteur).



Exemples de réalisations d'élèves

Anticipation et prolongement

On aurait pu concevoir ce travail comme un prolongement d'un travail de 5^{ème} sur la proportionnalité (réalisation d'un triangle représentant le sol et l'arbre à l'échelle) qui permet dès la 5^{ème} de déterminer ce type de longueurs par une démarche différente.

On peut aussi reprendre ce travail en 3^{ème} dans le cadre de la trigonométrie (plus rapide avec l'utilisation du sinus à la place du cosinus).

Limites de la démarche

La démarche suivie présente l'inconvénient de ne permettre ni une vérification des résultats ni une estimation de l'erreur, si ce n'est en comparant ce qu'obtiennent les différents groupes.

On peut cependant trouver des solutions à ce problème :

- en mesurant la hauteur du collège et en la comparant à des plans, nous aurions pu vérifier la cohérence globale des résultats,
- en faisant intervenir un professionnel (géomètre), un lien aurait pu être fait avec la découverte de la vie professionnelle et l'orientation.

Conclusion

L'expérience menée m'a paru très positive, même si bien sûr certains aspects demeurent perfectibles. Elle a permis à la fois de donner un cadre vraiment concret aux mathématiques, dans le cadre du programme de 4^{ème} et aussi aux élèves de s'investir, même les plus en difficultés.

On peut aussi envisager de mettre en place ce type d'activités dans d'autres cadres existant en collège (par exemple Club Nature ou Club Génial au collège de Fameck), et à d'autres niveaux, tant le sujet est vaste par rapport aux différentes orientations qu'on peut vouloir lui donner. L'accent peut en effet être mis sur la démarche expérimentale, le travail rigoureux de rédaction, la comparaison des données, la croissance des arbres...